Un topos, c'est quoi ?

Patricia Sorya

Janvier 2020

Résumé

Ce document est basé sur un exposé présenté en décembre 2019 dans le cadre du cours MAT7000 Théorie des catégories, enseigné par Olivier Collin à l'Université du Québec à Montréal. Il est destiné à un auditoire familier avec les concepts de bases de la théorie des catégories (foncteurs, adjonctions, limites...).

Afin de répondre à la question *Un topos, c'est quoi ?*, nous suivrons les traces chronologiques du développelement de la théorie des topos. Nous débutons par un survol catégorique de la théorie des faisceaux en topologie, ce qui mènera à la définition d'un topos de Grothendieck, introduit par Alexandre Grothendieck dans les années 50 comme outil de géométrie algébrique. L'axiomatisation de la théorie de Grothendieck par Jean Giraud en 1963 nous permettra de faire le pont en logique mathématique, afin de définir les topos élémentaires tels que développés par William Lawvere et Myles Tierney à la fin des années 60.

1 Faisceaux en topologie

Dans cette section, X est un espace topologique.

Définissons la catégorie des ouverts de X, qu'on note $\mathcal{O}uv(X)$. Les objets de $\mathcal{O}uv(X)$ sont les ouverts de X, et les morphismes sont donnés par

$$Hom(U,V) = \begin{cases} \{i : V \hookrightarrow U\} & \text{si } V \subset U \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases} .$$

Définition 1.1. Un *préfaisceau* (de base X) F est un foncteur donné par

$$\mathcal{O}uv(X)^{op} \longrightarrow \mathcal{E}ns$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, mapsto] & F(U) \arrow[d, "\rho_V^U"] \\ V \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, mapsto] & F(V) \end{tikzcd}$$

Les éléments des objets d'arrivée $F(U)$ sont appelés *sections*, et les morphismes ρ_V^U sont appelés *restrictions*.

La définition « classique » d'un faisceau d'espace topologique considère le diagramme suivant,

$$F(X) \xrightarrow{e} \prod_{i\in I} F(U_i) \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} F(U_i \cap U_j)$$

où $e = (\rho_{U_i}^U)_i$, $p = (\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i})_{i,j}$ et $p = (\rho_{U_i \cap U_j}^{U_j})_{i,j}$.

Définition 1.2. Un *faisceau* F est un préfaisceau tel que, pour tout recouvrement $\{U_i\}_{i\in I}$ de X, e est égalisateur de p et q pour le diagramme ci-haut.

On voudrait généraliser le concept de faisceau à une catégorie quelconque. Pour ce faire, donnons une définition plus « catégorique » , qui fait fi de la notion de recouvrement (cette dernière lui sera en fait intrinsèque).

Considérons la catégorie des préfaisceaux de base X,

$$\mathcal{PS}h(X) = \mathcal{F}onct(\mathcal{O}uv(X)^{op}, \mathcal{E}ns),$$

ayant comme objet les préfaisceaux de base X et comme morphismes, les transformations naturelles entre préfaisceaux.

Il existe une adjonction [1, p. 89]

$$\begin{tikzcd} \mathcal{PS}h(X) \arrow[r, shift left, "\Lambda"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{T}op/X \arrow[l, shift left, "\Gamma"] \end{tikzcd} ,$$

pour Λ et Γ définis ci-après.

Λ est donné par

$$\Lambda(F) = \coprod_{x\in X} \left(\varinjlim_{U\ni x} F(U) \right) \xrightarrow{p} X,$$

où $p\left(\varinjlim_{U\ni x} F(U)\right) = X$.

Définition 1.3. $\Lambda(F)$ est l'*espace étale* associé au préfaisceau F. La colimite $\varinjlim_{U\ni x} F(U)$ est la *fibre* de F au-dessus de $x \in X$. $\Lambda(F)$ est muni de la topologie rendant p homéomorphisme local.

Le foncteur Λ donne lieu à $\mathcal{E}tale(X) = \Lambda(\mathcal{PS}h(X))$, sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}op/X$.

Γ est donné par

$$\Gamma(Y \to X)(U) = Hom_{\mathcal{T}op/X}(U \hookrightarrow X, Y \to X).$$

$\Gamma(Y \to X)$ est donc un préfaisceau associant un ouvert U de X à l'ensemble des morphismes $s \in Hom_{\mathcal{T}op}(U, Y)$ rendant le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, hook] & & Y \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Remarquons que $\Gamma(Y \to X)(U)$ est bien un objet de $\mathcal{E}ns$ car $\mathcal{T}op$ est localement petite.

Lorsque Λ agit sur un objet de $\mathcal{E}tale(X)$, on a la terminologie suivante.

Définition 1.4. Soit E objet de $\mathcal{E}tale(X)$. $\Gamma(E)(U)$ est l'*ensemble des sections de E au-dessus de U.*

L'adjonction $\Lambda \dashv \Gamma$ mène à notre définition « catégorique » de faisceaux sur un espace topologique X.

Définition 1.5. Un *faisceau* est un objet de $\mathcal{PS}h(X)$ pour lequel l'unité de l'adjonction $\Lambda \dashv \Gamma$ est un isomorphisme.

Ce qui se résume par : soit η unité de $\Lambda \dashv \Gamma$, illustrée par

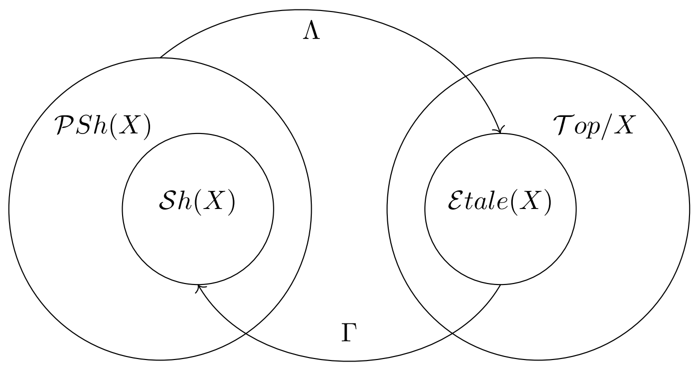
$$\begin{tikzcd} \mathcal{PS}h(X) \arrow[r, bend left=50, "1"{name=A}] \arrow[r, bend right=50, "\Gamma\Lambda"'{name=B}] & \mathcal{PS}h(X) \arrow[Rightarrow, from=A, to=B, "\eta"] \end{tikzcd},$$

alors un objet F de $\mathcal{PS}h(X)$ est faisceau si et seulement si η_F est isomorphisme.

Ainsi, l'adjonction se restreint à une équivalence de catégories

$$\mathcal{S}h(X) \cong \mathcal{E}tale(X)$$

illustrée par la figure suivante, où $\mathcal{S}h(X)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{PS}h(X)$ des faisceaux de base X.



Cette équivalence donne lieu à l'adjonction

$$\begin{tikzcd} \mathcal{PS}h(X) \arrow[r, shift left, "\Gamma\Lambda"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{S}h(X) \arrow[l, shift left, "i"] \end{tikzcd} .$$

Définition 1.6. Étant donné un préfaisceau F, $\Gamma\Lambda(F)$ est sa *faisceautisation*.

On remarque que :
- $\Gamma\Lambda$ préserve les limites finies, car l'objet terminal de $\mathcal{PS}h(X)$ est un faisceau (associant tout ouvert de X à l'objet terminal de $\mathcal{E}ns$), et on peut montrer que $\Gamma\Lambda$ préserve les pullbacks [1, p. 231] ;
- i est pleinement fidèle, car $\mathcal{S}h(X)$ est sous-catégorie pleine de $\mathcal{PS}h(X)$.

2 Faisceaux en catégories et topos de Grothendieck

Au lieu de considérer la catégorie $\mathcal{O}uv(X)$, on considère une petite catégorie $\mathcal{C}$ quelconque, pour laquelle on pose

$$\mathcal{PS}h(\mathcal{C}) = \mathcal{F}onct(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{E}ns).$$

Définition 2.1. Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie. Un *plongement géométrique* d'une catégorie $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{PS}h(\mathcal{C})$ est une adjonction

$$\begin{tikzcd} \mathcal{PS}h(\mathcal{C}) \arrow[r, shift left, "f^*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{A} \arrow[l, shift left, hook, "f_*"] \end{tikzcd} ,$$

où

— f^*, appelé *image inverse*, préserve les limites finies ;

— f_*, appelé *image directe*, est pleinement fidèle.

On note un tel plongement géométrique par $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{PS}h(\mathcal{C})$.

Définition 2.2. Une catégorie $\mathcal{A}$ est un *topos de Grothendieck* s'il existe une petite catégorie $\mathcal{C}$ pour laquelle il existe un plongement géométrique $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{PS}h(\mathcal{C})$.

Exemple 2.1. La catégorie $\mathcal{E}ns$ est un topos de Grothendieck. En effet, on prend $\mathcal{C} = *$ la catégorie à un objet, $*$, et un morphisme, 1_*. $\mathcal{PS}h(*)$ est constituée de foncteurs $F_E : * \mapsto E$ pour chaque objet E de $\mathcal{E}ns$. L'association $F_E \leftrightarrow E$ donne lieu à une équivalence de catégories entre $\mathcal{PS}h(*)$ et $\mathcal{E}ns$. En prenant $f^* = f^* = 1_{\mathcal{PS}h(*)}$, on a l'adjonction triviale

$$\begin{tikzcd} \mathcal{PS}h(*) \arrow[r, shift left, "1"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{PS}h(*) \arrow[l, shift left, hook, "1"] \end{tikzcd} \simeq \mathcal{E}ns ,$$

pour laquelle l'image inverse préserve les limites finies et l'image directe est pleinement fidèle.

En composant avec l'équivalence entre $\mathcal{PS}h(*)$ et $\mathcal{E}ns$, on obtient un plongement géométrique $\mathcal{E}ns \hookrightarrow \mathcal{PS}h(*)$, faisant de $\mathcal{E}ns$ un topos de Grothendieck.

Exemple 2.2. La catégorie $\mathcal{S}h(X)$ pour X un espace topologique est un topos de Grothendieck, car elle est plongée géométriquement dans $\mathcal{PS}h(X) = \mathcal{PS}h(\mathcal{O}uv(X))$. L'image inverse est $\Gamma\Lambda$ et l'image directe est i.

On peut voir un topos de Grothendieck comme une généralisation de la notion de faisceaux en topologie.

La définition 2.2 est clairement analogue à la définition 1.5. Or, historiquement, c'est plutôt l'idée de recouvrement de la définition 1.2 que Grothendieck a su généraliser aux catégories, comme en témoigne d'ailleurs le choix du terme *topos*.

En effet, étant donné une petite catégorie $\mathcal{C}$, chaque plongement géométrique $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{PS}h(\mathcal{C})$ correspond à une « topologie » qu'on met sur $\mathcal{C}$, ce qui permet d'étudier cette dernière « comme » un espace topologique à travers la théorie des faisceaux.

Ainsi, une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'une *topologie de Grothendieck* J est appelée un *site*, noté $(\mathcal{C}, J)$. Sans définir formellement ce qu'est une topologie de Grothendieck, nous présentons dans le tableau suivant quelques analogies avec la topologie sur un espace.

$(X, \mathcal{T})$	$(\mathcal{C}, J)$
$\{U_i \hookrightarrow U\}$ U_i, U ouverts de la topologie $\mathcal{T}$ de X	$\{C_i \to C\}$ morphismes définissant la topologie de Grothendieck $J(C)$ de l'objet C
$U_i \cap U_j = U_i \times_X U_j$, pullback dans $\mathcal{O}uv(X)$	$C_i \times_C C_j$ pullback dans $\mathcal{C}$
$\mathcal{PS}h(X)$	$\mathcal{PS}h(\mathcal{C})$
$\mathcal{S}h(X) \hookrightarrow \mathcal{PS}h(X)$	$\mathcal{S}h(\mathcal{C}, J) \hookrightarrow \mathcal{PS}h(\mathcal{C})$
$F(X) \xrightarrow{e} \prod F(U_i) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod F(U_i \cap U_j)$ F est faisceau ssi e est égalisateur de p, q	$F(C) \xrightarrow{e} \prod F(C_i) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod F(C_i \cap C_j)$ F est faisceau ssi e est égalisateur de p, q

Il existe en fait une correspondance entre les plongements géométriques dans $\mathcal{PS}h(\mathcal{C})$ et les topologies de Grothendieck sur $\mathcal{C}$.

$$\{\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{PS}h(\mathcal{C})\}_{\mathcal{A}} \longleftrightarrow \{\mathcal{S}h(\mathcal{C}, J) \hookrightarrow \mathcal{PS}h(\mathcal{C})\}_J$$

La définition 2.2 est équivalente à la définition suivante.

Définition 2.3. Un *topos de Grothendieck* est une catégorie de faisceaux sur un site $(\mathcal{C}, J)$, où $\mathcal{C}$ est une petite catégorie.

3 Topos élémentaires

La généralisation de la notion topologique de faisceau à celle des catégories donne une féconde direction aux logiciens du milieu du 20e siècle. En effet, ceux-ci cherchent à inclure la théorie des ensembles, vue comme un système formel en particulier, dans une théorie plus générale, soit en l'occurrence celle des catégories.

Afin de définir des systèmes formels dans un langage purement catégorique, nous devons nous placer dans un cadre axiomatique n'ayant pas recours aux axiomes de Zermelo-Fraenkel et du choix. Or, les topos de Grothendieck tels que définis précédemment sont intimement liés à la catégorie $\mathcal{E}ns$ à travers la catégorie $\mathcal{PS}h(\mathcal{C})$. Il faut donc se départir de cette dépendance à la théorie des ensembles dans la construction des topos.

Le théorème de Giraud s'approche de ce but en formalisant de façon axiomatique la construction que nous avons présentée dans la section précédente. Nous l'énonçons tel que présenté dans [1, p. 577].

Théorème 1 (Giraud). *Une catégorie $\mathcal{C}$ est un topos de Grothendieck si et seulement si*

(i) $\mathcal{C}$ possède les petits coproduits, et ces derniers sont stables sous pullback ;

(ii) tout épimorphisme est un coégalisateur ;

(iii) toute relation d'équivalence est une paire de noyau et possède un quotient ;

(iv) tout coégalisateur est stablement exact ;

(v) il existe une petite collection d'objets de $\mathcal{C}$ qui engendre $\mathcal{C}$.

Ce théorème parvient à encapsuler les propriétés de la catégorie $\mathcal{E}ns$ nécessaires à l'existence d'un plongement géométrique dans $\mathcal{PS}h(\mathcal{C})$, sans la mentionner explicitement.

Le contexte de Giraud est par contre encore trop restrictif pour parler de systèmes formels quelconques, en particulier parce qu'il fait référence à la notion de *petitesse* qui est ensembliste. Il faudra relaxer quelque peu les conditions pour arriver à la généralité voulue.

Définition 3.1. Un *topos élémentaire* est une catégorie avec

(i) limites finies ;

(ii) objets exponentiels ;

(iii) un classificateur de sous-objet.

La notion de classificateur de sous-objet est ce qui distingue une catégorie cartésienne fermée avec limites finies (donnée par (i) et (ii)) d'un topos élémentaire.

Définition 3.2. Un *classificateur de sous-objet* d'une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée

— d'un objet Ω de $\mathcal{C}$;

— d'un morphisme $1 \xrightarrow{t} \Omega$, où 1 est objet terminal,

tels que pour chaque sous-objet $A \rightarrowtail X$, il existe un unique morphisme $X \xrightarrow{\chi_A} \Omega$ tel que le carré suivant soit un pullback.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "\chi_A"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Exemple 3.1. Dans $\mathcal{E}ns$, $1 \xrightarrow{t} 2 = \{\mathtt{t}, \mathtt{f}\}$ où $t(1) = \mathtt{t}$ est classificateur de sous-objet. En effet, pour A sous-objet de X, on a que l'unique morphisme $X \xrightarrow{\chi_A} 2$ faisant du diagramme ci-bas un pullback est

$$\chi_A(x) = \begin{cases} \mathtt{t} \ , \ x \in A \\ \mathtt{f} \ , \ x \notin A \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, hook] & 1 \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, dashed, "\exists!", "\chi_A"'] & 2 \end{tikzcd}$$

Exemple 3.2. Dans $\mathcal{PS}h(X)$ où X un espace topologique, on peut vérifier que $1 \xrightarrow{t} \Omega$ est classificateur de sous-objet, où Ω est tel que

$$\Omega(U) = \{W \subset U, W \text{ objet de } \mathcal{O}uv(X)\}$$

et t est donné par $t_U(u) = U$ pour tout $u \in 1(U) = U$.

Soit $P \rightarrowtail F$ sous-objet de $\mathcal{PS}h(X)$. L'unique morphisme χ_P donnant la condition de pullback est donné par

$$(\chi_P)_U(s) = \bigcup_{i \in I} W_i$$

où $I = \{i \mid \rho^U_{W_i}(s) \in P(W_i)\}$.

Exemple 3.3. On généralise l'exemple précédent à $\mathcal{PS}h(\mathcal{C})$ où $\mathcal{C}$ est une petite catégorie. On prend $\Omega(C)$ l'ensemble des sous-foncteurs de $Hom(-,C)$, et $t_C(c) = Hom(-,C)$ pour tout $c \in 1(C)$.

Soit $P \overset{m}{\rightarrowtail} F$ sous-objet de $\mathcal{PS}h(\mathcal{C})$. L'unique morphisme χ_P donnant la condition de pullback est donné par

$$(\chi_P)_C(s) = \{A \xrightarrow{g} C \mid F(g)(x) \in m_A(P(A))\},$$

faisant de $1 \xrightarrow{t} \Omega$ un classificateur de sous-objet.

Ces exemples montrent que les topos de Grothendieck $\mathcal{E}ns$, $\mathcal{PS}h(X)$ et $\mathcal{PS}h(\mathcal{C})$ sont des topos élémentaires. Par le théorème de Giraud, c'est le cas pour tout topos de Grothendieck.

La réciproque est fausse. La catégorie $\mathcal{E}ns\mathcal{F}in$ des ensembles finis est un topos élémentaire, possédant le même classificateur de sous-objet que $\mathcal{E}ns$. Or, elle n'a pas tous les petits coproduits, ces derniers correspondant à

$$\coprod_{i \in I} A_i,$$

une union disjointe d'ensembles finis A_i, indexés par I un ensemble quelconque. Prenons $A_i = \{*\}$ et I un ensemble non fini. Alors le coproduit est isomorphe à I dans $\mathcal{E}ns$, qui n'est pas objet de $\mathcal{E}ns\mathcal{F}in$. Par Giraud, $\mathcal{E}ns\mathcal{F}in$ n'est pas un topos de Grothendieck.

La notion de topos élémentaire permet à Lawvere de définir une *théorie élémentaire de la catégorie des ensembles*[2]. Elle est l'aboutissement des efforts déployés pour formuler une théorie indépendante de la théorie des ensembles, et elle ouvre la porte à la théorie des topos.

Définition 3.3. Une *catégorie d'ensembles* $\mathcal{E}$ est un topos élémentaire tel que

(i) $\mathcal{E}$ possède des objets initial et terminal qui ne sont pas isomorphes ;

(ii) pour tout digramme $1 \xrightarrow{x} X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$, si $fx = gx$, alors $f = g$;

(iii) il existe N objet de $\mathcal{E}$ tel que pour tout $1 \xrightarrow{x} X \xrightarrow{r} X$, il existe des morphismes $0 : 1 \to N$ et $s : N \to N$ tels qu'il existe un unique $f : N \to X$

tel que le diagramme suivant commute ;

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "\exists! f"] & N \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "x"'] & & \\ & X \arrow[r, "r"] & X \end{tikzcd}$$

(iv) les épimorphismes sont scindés.

Ces conditions ne sont pas équivalentes à la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel avec l'axiome du choix, mais plutôt à une théorie dite restreinte de Zermelo avec l'axiome du choix (*restricted Zermelo with choice* [1, p. 332]). On reconnaît l'axiome du choix dans la condition (iv). Les conditions (i) et (ii) donnent que l'objet terminal engendre le topos ; ce dernier est alors dit *bien pointé*. La condition (iii) donne l'existence d'un *objet nombres naturels*, où s est un morphisme *successeur*.

4 Conclusion

Bien que leur construction soit étroitement liée à la topologie, les topos de Grothendieck constituent en fait la majorité des topos élémentaires étudiés en logique[3], par exemple en théorie géométrique (une théorie de premier ordre), en théorie des locales, et en théorie des catégories d'ordre supérieur.

Ainsi, c'est en passant par des notions de topologie que nous parvenons, grâce aux topos élémentaires, à définir et à étudier des cadres formels dans lesquels on effectue des mathématiques.

Références

[1] Saunders MacLane et Ieke Moerdijk : *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer-Verlag, New York, 1992.

[2] William Lawvere : An Elementary Theory of the Category of Sets. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 52(6):1506–1511, 1964.

[3] Tom Leinster : An informal introduction to topos theory. *arXiv e-prints*, décembre 2010. arXiv :1012.5647.

[4] Saunders MacLane : Book review : Topos theory by Peter Johnstone. *Bulletin of the Amer. Math. Society*, 1(6):1005–1014, 1979.

[5] Fernand Beaudet : Introduction à la théorie des faisceaux. Notes de conférence. 2013.

[6] Fernand Beaudet : Cohomologie des faisceaux. Notes de cours. 1994.

[7] nLab authors : nLab. http ://ncatlab.org/.