Triangulation des surfaces compactes

Une *surface* est une variété connexe de dimension 2. En 1925, Tibor Radò démontre que toute surface possède une *triangulation*, c'est-à-dire qu'elle est isomorphe à un complexe simplicial de dimension 2 (Ahlfors and Sario, Riemann Surfaces).

Nous démontrons ici le cas particulier des surfaces compactes.

Théorème. *Toute surface compacte possède une triangulation.*

L'existence d'une triangulation pour une surface compacte S se traduit par le fait qu'il existe un recouvrement fini $\{T_i\}_{1\leq i\leq n}$ de S et des homéomorphismes $f_i : T_i \to T_i' \subset \mathbb{R}^2$ tels que T_i' soit un triangle du plan. De plus, pour T_i, T_j éléments de la triangulation, T_i, T_j sont soit disjoints, soit ont un point en commun, soit ont l'image par f_i^{-1} d'une arête de T_i' et l'image par f_j^{-1} d'une arête de T_j' en commun (Massey, Algebraic Topology : An Introduction).

La stratégie générale de la démonstration consiste à partitionner la surface en régions homéomorphes à des polygones du plan. Il s'agit de trouver un recouvrement dont les ensembles ont des bords qui s'intersectent en un nombre fini de fois. Ensuite, on construit les homéomorphismes pour obtenir la triangulation voulue.

Soit S une surface compacte. Soit $\bigcup_{p\in S} U_p$ un recouvrement ouvert de S, où U_p voisinnage ouvert de $p \in S$. Par définition d'une variété, il existe un homéomorphisme $\varphi_p : U_p \to D_p$ où D_p un disque ouvert de $\mathbb{R}^2$. Supposons les D_p disjoints deux à deux dans $\mathbb{R}^2$. Dans chaque D_p, considérons $int(Q_p)$ un ouvert connexe et simplement connexe, tel que $\varphi_p(p) \in int(Q_p)$. L'union des $\varphi_p^{-1}(int(Q_p))$ est un recouvrement de S ; ce dernier étant compact, il existe un sous-recouvrement fini $\bigcup_{i=1}^n \varphi_i^{-1}(int(Q_i))$ où $int(Q_i) \in \{int(Q_p), p \in S\}$. Notons Q_i la fermeture des ouverts $int(Q_i) \subset \mathbb{R}^2$ dont les images par les φ_i^{-1} respectifs recouvrent S.

1 Finitude de l'intersection entre les bords des Q_i du recouvrement

Les bords ∂Q_i sont des courbes fermées simples. On veut montrer qu'on peut choisir les $int(Q_i) \subset D_i$ tels que les images de leurs bords par les φ_i^{-1} respectifs s'intersectent en un nombre fini de points sur S. Pour simplifier la notation, posons $\varphi_i^{-1} Q_i = \widetilde{Q_i}$. Par continuité, on a $\varphi_i^{-1} \partial Q_i = \partial \varphi_i^{-1} Q_i = \partial \widetilde{Q_i}$. Il nous faut montrer que

$$|\partial \widetilde{Q_i} \cap \partial \widetilde{Q_j}| < \infty$$

pour tout $1 \leq i < j \leq n$.

Soient Q_i et Q_j tels que $|\partial \widetilde{Q_i} \cap \partial \widetilde{Q_j}| = \infty$. Considérons un fermé $Q_i' \subset D_i$ tel que $Q_i \subset int(Q_i')$. Remplacer $\varphi_i^{-1} int(Q_i)$ par $\varphi_i^{-1} int(Q_i')$ nous donne encore un recouvrement fini de S.

$\partial \widetilde{Q_i'}$ n'intersecte pas les segments de $\partial \widetilde{Q_i}$ qui pourraient être dans $|\partial \widetilde{Q_i} \cap \partial \widetilde{Q_j}|$. Considérons donc les composantes de cette intersection qui ne sont pas des segments de $\partial \widetilde{Q_i}$.

Soit ϵ la distance minimale entre un point de $\partial \widetilde{Q_i}$ et un point de $\partial \widetilde{Q_i'}$.

Il existe une infinité de segments de $\partial \widetilde{Q_j}$ dans $S \setminus \widetilde{Q_i}$, puisque $\partial \widetilde{Q_j}$ "oscille" une infinité de fois en intersectant $\partial \widetilde{Q_i}$.

Montrons qu'il y a un nombre fini de ces segments de $\partial \widetilde{Q_j}$ qui intersectent $\partial \widetilde{Q_i'}$.

Supposons qu'une infinité de segments de $\partial \widetilde{Q_j}$ intersectant $\partial \widetilde{Q_i}$ intersectent aussi $\partial \widetilde{Q_i'}$. Considérons un sous-ensemble infini dénombrable de tels segments, qui ont des extrémités $u_n, v_n \in \partial \widetilde{Q_i}$ de sorte que u_n soit le point d'"entrée" et v_n soit le point de "sortie" du segment dans $S \setminus \widetilde{Q_i}$ à partir de $\partial \widetilde{Q_i}$. Ainsi, le segment de $\partial \widetilde{Q_j}$ allant de u_n à v_n est complètement contenu dans $S \setminus \widetilde{Q_i}$ sauf pour ses extrémités.

Soit la suite $\{p_n\}$ telle que $p_{2n-1} = u_n \in \partial\widetilde{Q_i}$, et $p_{2n} = v_n \in \partial\widetilde{Q_i}$. Remarquons que le segment de $\partial\widetilde{Q_i}$ d'extrémités u_n, v_n ne peut contenir un autre élément de la suite, car sinon on aurait que $\partial\widetilde{Q_j}$ n'est pas une courbe simple, contredisant l'injectivité de φ_j^{-1}.

On peut supposer que cette suite converge vers un $p \in \partial\widetilde{Q_i} \cap \partial\widetilde{Q_j}$, puisque $\partial\widetilde{Q_i} \cap \partial\widetilde{Q_j}$ est un compact de S par continuité de $\varphi_i^{-1}, \varphi_j^{-1}$ ($\partial Q_i, \partial Q_j$ sont des compacts de $\mathbb{R}^2$). Les sous-suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ convergent aussi vers p, par unicité de la limite.

Considérons maintenant la paramétrisation $\gamma : [0,1) \to \partial\widetilde{Q_j}$ de $\partial\widetilde{Q_j}$ en tant que courbe simple fermée. Soient $t_0, r_n, s_n \in [0,1)$ tels que $\gamma(t_0) = p, \gamma(r_n) = u_n, \gamma(s_n) = v_n$. Par continuité de γ^{-1}, les suites $\{r_n\}$ et $\{s_n\}$ convergent vers t_0.

Par continuité de γ, il existe $\delta > 0$ tel que $|t - t_0| < \delta$ implique que $\gamma(t)$, un point de $\partial\widetilde{Q_j}$, soit contenu dans la boule ouverte $B(p, \epsilon/2)$.

L'intervalle $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ contient une infinité de r_n, s_n par convergence de leurs suites respectivent. Soit un couple r_k, s_k tel que $\gamma(r_k) = u_k$ et $\gamma(s_k) = v_k$ constituent les extrémités d'un même segment croisant $\partial\widetilde{Q_i'}$. Par continuité de γ, on a $[r_k, s_k] \subset (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Ainsi, le segment d'extrémités u_k, v_k est contenu dans $B(p, \epsilon/2)$.

Or, $B(p, \epsilon/2)$ n'instersecte pas $\partial\widetilde{Q_i'}$. Par conséquent, le segment d'extrémités u_k, v_k n'intersecte pas $\partial\widetilde{Q_i'}$, contredisant la construction de la suite $\{p_n\}$.

Nous avons démontré que $\partial\widetilde{Q_i'}$ n'intersecte pas une infinité des segments qui intersectaient $\partial\widetilde{Q_i}$, mais il se peut qu'il intersecte un autre ensemble infini de segments d'un $\partial\widetilde{Q_j}, i \neq j$. On considère alors un nouveau fermé Q_i'' dans D_i tel que $Q_i'' \subset int(Q_i')$ et $Q_i \subset int(Q_i'')$, ou tel que $Q_i'' \supset int(Q_i')$. On a toujours un recouvrement fini de S en remplaçant $\widetilde{Q_i'}$ par $\widetilde{Q_i''}$. On applique le même raisonnement que ci-haut en remplaçant les rôles de Q_i par Q_i' et Q_i' par Q_i''.

Si aucune des modifications telles que décrites ci-haut de Q_i ne permet une intersection finie, c'est donc que $\widetilde{D_i}$ doit être lui-même être recouvert de d'autres $\widetilde{Q_j}$ afin de combler les "interstices" entre les oscillations infinies. Il s'ensuit que S reste recouverte même si on retire ce Q_i, c'est-à-dire que le recouvrement contenant $\widetilde{Q_i}$ n'était pas minimal. En supposant qu'on avait un recouvrement fini minimal, il est donc toujours possible de trouver un Q_i tel que $\partial\widetilde{Q_i}$ intersecte un nombre fini de fois les autres $\partial\widetilde{Q_j}$.

2 Application du théorème de Jordan-Schönflies

Considérons alors $Q_i \cap \varphi_i \left(\bigcup_{1\leq j\leq n} \partial\widetilde{Q_j}\right) \subset \mathbb{R}^2$. Il s'agit de l'image dans Q_i des $\partial\widetilde{Q_j}$ intersectant $\varphi_i^{-1}Q_i$ sur S. Cet ensemble peut être vu comme un nombre fini d'arcs qui séparent Q_i en régions. Ces dernières sont délimitées par des courbes fermées simples, en l'occurence des segments des $\varphi_i\partial\widetilde{Q_j}$ et de ∂Q_i.

Soit C une de ces courbes et soit m le nombre de points de C éléments d'une intersection $\varphi_i\partial\widetilde{Q_j} \cap \varphi_i\partial\widetilde{Q_k}, 1 \leq j < k \leq n$. Remarquons que $m > 2$: les points des intersections précédemment mentionnées doivent être dans un $int(Q_l), l \neq j, k$ car les $\varphi_i^{-1}int(Q_i)$ recouvrent S ; alors $\varphi_i\partial\widetilde{Q_l}$ intersecte $\varphi_i\partial\widetilde{Q_j}$ et $\varphi_i\partial\widetilde{Q_k}$ et un point d'intersection fait toujours partie d'un bord de région ayant au moins trois points d'intersection. Par le théorème de Jordan-Schönflies, $int(C) \cup C$ est homéomorphe à un polygone régulier de m côtés, tel que chaque côté soit homéomorphe à un segment de C entre deux points appartenant à une intersection $\varphi_i\partial\widetilde{Q_j} \cap \varphi_i\partial\widetilde{Q_k}, 1 \leq j < k \leq n$.

Il existe donc un tel homéomorphisme pour chaque telle région de chaque $Q_i, 1 \leq i \leq n$. On peut supposer que les homéomorphismes donnent comme images des polygones deux à deux disjoints dans $\mathbb{R}^2$. On triangularise les polygones de plus de trois côtés en joignant un point de leur intérieur à chacun des sommets du polygone par un segment de droite. En identifiant les polygones provenant d'une même intersection $\varphi^{-1}Q_i \cap \varphi^{-1}Q_j$, on obtient la triangulation voulue.

$\square$

Références

Gallier, Jean et Xu, Diana. *A guide to the classification of compact surfaces.* Springer, 2013.

Thomassen, Carsten. *The Jordan-Schönflies Theorem and the Classification of Surfaces.* The American Mathematical Monthly, Vol. 99, No.2, Feb 1992, pp. 116-131.