Théorème de Jordan-Schönflies

Soit C un courbe fermée simple de $\mathbb{R}^2$. Par le théorème de Jordan, C sépare le plan en deux régions : $int(C)$ bornée par C, et $ext(C)$ non bornée. Ces régions ont toutes deux C comme frontière.

Le théorème de Jordan-Schönflies généralise le théorème de Jordan.

Théorème. *Soit C une courbe fermée simple de $\mathbb{R}^2$. Alors il existe un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que C soit homéomorphe à S^1 et tel que $int(C)$ et $ext(C)$ soient respectivement homéomorphes à D^2 et $\mathbb{R}^2 \setminus (D^2 \cup S^1)$, où D^2 est le disque unité ouvert et S^1 le cercle unité.*

Dans ce document, nous présentons la démonstration de Carsten Thomassen, publiée en 1992, que nous complémentons de nos réflexions topologiques et analytiques.

Nous construisons explicitement un homéorphisme entre $int(C) \cup C$ et $D^2 \cup S^1$ tel que $int(C)$ soit homéomorphe à S^1. La même construction peut être appliquée à $ext(C)$ afin d'obtenir le résultat général du théorème.

1 C est homéomorphe à S^1

C est paramétrée par $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ pour $t \in [0,1]$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$.

C étant simple, γ est bijective sur $[0,1)$. On a donc l'homéomorphisme

$$\begin{aligned} F : \qquad C &\xrightarrow{\gamma^{-1}} [0,1) \longrightarrow S^1 \\ \gamma(t) &\longmapsto t \longmapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{aligned}$$

entre C et le cercle unité S^1. On cherche à étendre F à $int(C)$ afin que $F(int(C)) = int(D^2)$, tel que F soit homéomorphisme entre $int(C) \cup C$ et $D^2 \cup S^1$.

2 Extension par graphes isomorphes

Factorisons F par les homéomorphismes f et g tels que

$$F : C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{g} S^1$$

où C' est une courbe fermée polygonale telle que $int(C') \cup C'$ est un polygone convexe. En montrant que f peut être étendue homéomorphiquement à $int(C) \cup C$, on obtient le résultat voulu par généralité de C, donnant g homéomorphisme de $int(C') \cup C'$ à $D^2 \cup S^1$. On obtiendra alors une extension de $F = g \circ f$ qui sera l'homéomorphisme cherché.

Soit $\Gamma_0 \subset int(C) \cup C$ un graphe 2-connecté [1] pour lequel C forme un cycle et soit g_0 un isomorphisme entre Γ_0 et un graphe $\Gamma'_0 \subset int(C') \cup C'$ pour lequel C' forme un cycle. On définit g_0 tel que si un cycle $c \in \Gamma_0$ borne une région, alors $g_0(c) \subset \Gamma'_0$ borne aussi une région. Supposons de plus que $g_0 = f$ sur $C \cap V(\Gamma_0)$, où $V(G)$ désigne les sommets d'un graphe G.

On peut alors étendre f par g_0 sur l'ensemble $V(\Gamma_0) \subset int(C)$.

Afin d'étendre f aux autres points de $int(C)$, on cherche à construire des suites de graphes $\{\Gamma_n\}$ et $\{\Gamma'_n\}$, telles que Γ_n et Γ'_n soient isomorphes par une fonction g_n analogue à g_0 décrite ci-haut. Cette construction nous servira à "remplir densément" $int(C)$ par les sommets $V(\Gamma_n)$, sur lesquels on étendra successivement f par les isomorphismes de graphes g_n.

Pour ce faire, nous avons besoin de la notion d'accessibilité d'un point.

1. Un graphe d'au moins $k + 1$ sommets est dit *k-connecté* s'il est connexe et demeure connexe si on lui retire $k - 1$ sommets.

3 Accessibilité d'un point

Un point p de C est dit *accessible à partir de* $int(C)$ si pour tout point q de $int(C)$, il existe un arc polygonal simple joignant q et p n'ayant que p en commun avec C. Montrons que l'ensemble de tels points de C est dense dans C.

Soit $P \subset C$ un arc dans C. Alors $(\mathbb{R}^2 \setminus C) \cup P$ est connexe par arcs. Il existe donc un arc polygonal simple P' joignant $q \in int(C)$ à tout $p \in (\mathbb{R}^2 \setminus C) \cup P$. Remarquons que si en particulier, on avait $p \in P$, on ne peut immédiatement dire que P' n'a que p en commun avec C. Considérons donc $p \in \mathbb{R}^2 \setminus int(C) \subset (\mathbb{R}^2 \setminus C) \cup P$ quelconque. P' doit intersecter P en au moins un point. En partant de q, le premier point d'intersection $p' \in P' \cap P \subset C$ est un point accessible de C.

Tout $P \subset C$ contient donc au moins un point accessible. Soient alors $x \in C$ et $U \subset C$ ouvert de C contenant x. Considérons un fermé $P \subset U$ contenant x : c'est un arc dans C. Par ci-haut, il existe un point accessible $p' \in P \subset U$. L'ensemble des points de C accessibles à partir de $int(C)$ est bien dense dans C.

4 Ensemble dense et dénombrable

Pour construire nos suites de graphes, nous voudrons considérer un ensemble dense et dénombrable dans $int(C) \cup C$.

Posons Ω l'ensemble des points accessibles de C à partir de $int(C)$, et posons $Q = C \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$. Notons que Q est dénombrable et dense dans C.

Pour tout $q \in Q \subset C$, il existe une suite $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers q, par densité de Ω dans C. Posons

$$A = \bigcup_{q\in Q} \{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

A est dénombrable car Q et $\mathbb{N}$ le sont. De plus, $\overline{A} = Q$, d'où $\overline{\overline{A}} = \overline{Q} = C$, et alors $\overline{A} = C$. $A \in \Omega$ est dense et dénombrable dans C.

Remarque. Par le même raisonnement, on obtient que tout ensemble dense d'un espace séparable possède un sous-ensemble dense dans cet espace et qui est dénombrable.

Posons $B = int(C) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$; c'est un ensemble dense dans $int(C)$ et dénombrable.

A et B étant respectivement denses dans C et $int(C)$, on a $A \cup B$ dense dans $int(C) \cup C$ et dénombrable.

Soit alors $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A \cup B$ une suite où chaque élément de $A \cup B$ apparaît une infinité de fois.

Par récurrence, supposons qu'on a étendu f à un ensemble $V(\Gamma_0) \cup V(\Gamma_1) \cup \ldots \cup V(\Gamma_{n-1}) \subset int(C)$. Définissons Γ_n selon que p_n est dans A ou B.

5 Construction de $\Gamma_n : p_n \in A$

Supposons $p_n \in A$. Il est sur un cycle c bornant une région R_c de Γ_{n-1}. Par densité des points accessibles à partir d'une région, il existe $q_n \in c \setminus C$ accessible à partir R_c. Soit $p \in R_c$ rejoignant q_n par un arc polygonal. Comme p_n est accessible à partir de $int(C)$, il existe un arc polygonal joignant p_n et p, ce qui nous donne un arc polygonal joignant p_n et q_n.

On définit Γ_n comme l'union de Γ_{n-1}, de p_n et q_n comme sommets et de l'arc polygonal joignant p_n et q_n comme arête.

On définit Γ'_n comme l'union de Γ'_{n-1}, de $g_{n-1}(p_n)$ et $g_{n-1}(q_n)$ comme sommets et de l'arc polygonal joignant $g_{n-1}(p_n)$ et $g_{n-1}(q_n)$ comme arête (qui existe par l'argument de densité des points accessibles).

On définit g_n en étendant g_{n-1} à l'arête joignant p_n et q_n, tel que cette dernière soit isomorphe à l'arête joignant $g_{n-1}(p_n)$ et $g_{n-1}(q_n)$ et tel que g_n soit continue sur Γ_n. Du coup, g_n est bien isomorphisme entre Γ_n et Γ'_n.

On étend f à $V(\Gamma_n)$ en posant $f = g_n$ sur $V(\Gamma_n)$. f est maintenant définie sur $C \cup V(\Gamma_0) \cup \ldots \cup V(\Gamma_{n-1}) \cup V(\Gamma_n) \subset int(C) \cup C$.

6 Construction de Γ_n : $p_n \in B$

Supposons $p_n \in B \subset int(C)$. Traçons une grille de taille maximale complètement contenue dans $int(C)$ telle que p_n est à l'intersection de segments de la grille, et telle que chaque région de la grille soit de diamètre $< 1/n$. Ajoutons à Γ_{n-1} cette grille, avec les intersections de ses segments comme sommets et ses segments comme arêtes. Ajoutons des arêtes de sorte que le graphe résultant soit connecté. Notons ce graphe $\widetilde{\Gamma_n}$.

Ajoutons à Γ'_{n-1} les sommets et arêtes correspondants afin de le rendre isomorphe à $\widetilde{\Gamma_n}$, tel qu'un cycle bornant une région soit isomoprhe à un cycle bornant une région. Notons ce graphe $\widetilde{\Gamma'_n}$. A priori, on ne connaît pas le diamètre des régions du sous-graphe de $\widetilde{\Gamma'_n}$ correspondant à la grille de $\widetilde{\Gamma_n}$. Ajoutons donc à $\widetilde{\Gamma'_n}$ des arêtes de façon à ce que ce sous-graphe n'ait que des régions de diamètre $< 1/2n$. Notons ce nouveau graphe Γ'_n.

Afin de préserver l'isomorphisme, ajoutons à $\widetilde{\Gamma_n}$ les sommets et arêtes correspondants aux ajouts que nous avons fait pour obtenir Γ'_n. Ceci nous donne le graphe Γ_n.

On étend f sur les sommets $V(\Gamma_n)$ de la même façon que précédemment.

7 Extension à $int(C) \setminus V$

Posons $V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V(\Gamma_n)$. Nous avons étendu f à l'ensemble $C \cup V$. Par construction, on a $\{p_n\} \subset V$. Comme $\{p_n\}$ contient tout les points de $A \cup B$, V est dense dans $int(C)$.

Soit $p \in int(C) \setminus V$. Par densité de V, il existe une suite $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ convergeant vers p. Montrons que $\{f(q_n)\}$ converge en montrant que c'est une suite de Cauchy.

Soit $\epsilon > 0$, et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1/n < \epsilon$. Soit $p_n \in B$.

Par construction de Γ_n et Γ'_n, il existe un cycle c de Γ_n entourant p tel que $int(g_n(c))$ est de diamètre $< 1/n$: en effet, soit p est dans un région de Γ_n, alors la région correspondante de Γ'_n est de diamètre $< 1/2n < 1/n$; soit p est sur une arête de Γ_n, alors l'union de l'arête et des régions de par et d'autre de l'arête est de diamètre $< 1/2n + 1/2n = 1/n$.

$int(c)$ est un ouvert contenant p. Par convergence de $\{q_n\}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m > N$ on a $\{q_m\} \subset int(c)$. Les graphes étant 2-connectés, on a $f(\{q_m\}) = g_n(\{q_m\}) \subset int(g_n(c))$. Alors pour tout $m, n > N$, on a $d(f(q_n), f(q_m)) < 1/n < \epsilon$, si bien que $\{f(q_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est suite de Cauchy.

Posons $f(p)$ la limite de cette suite. Comme la limite d'une suite convergente est unique, on vient de définir f sur tout $int(C) \cup C$.

8 f est homéomorphisme entre $int(C)$ et $int(C')$

Montrons que f est continue sur $int(C)$. Soit $\epsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $1/n < \epsilon$. Soit $p \in int(C)$. Par construction, p est entouré d'un cycle c de Γ_n tel que $int(g_n(c))$ est de diamètre $< 1/n$. L'argument ci-haut donne que $f(q) \in int(g_n(c))$ pour tout $q \in int(c)$, alors on a $d(f(p), f(q)) < 1/n < \epsilon$, d'où f continue sur $int(C)$.

Montrons que f est injective sur $int(C)$. Soient $p, q \in int(C)$ tels que $f(p) = f(q)$. Supposons que $p \neq q$. Soit un arc simple P joignant p, q dans $int(C)$. Par continuité de f, $f(P)$ est un arc joignant $f(p)$ et $f(q)$: c'est donc une courbe fermée. Par densité de V dans $int(C) \cup C$, il existe deux éléments de V sur P. f est bijective sur V, alors $f(P)$ n'est pas réduite au point $f(p) = f(q)$. Par continuité, il existe un autre arc simple P' tel que $f(P')$, un courbe fermée, soit contenue dans $int(f(P))$. On a que la région bornée par $P \cup P'$ est envoyée sur la région bornée par $f(P) \cup f(P')$. Or, la continuité implique que $int(C) \backslash int(P \cup P')$ est envoyée sur $int(P')$, faisant de l'image de $int(C)$ la région bornée par $f(P)$. Ainsi, $f(P) = C'$, d'où $P = C$ ce qui est absurde.

Montrons que f est surjective sur $int(C)$. Soit $p' \in int(C')$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un cycle $g_n(c_n) \in \Gamma'_n$ entourant p' tel que $int(c_n)$ est de diamètre $< 1/n$. Considérons une suite de tels cycles tels que $c_n \subset int(c_{n-1}) \cup c_{n-1}$, qui existent par construction des Γ_n. Posons $V' = \bigcup_{n=0}^{\infty} V(\Gamma'_n)$. Soit alors $\{q'_n\} \subset int(C')$ telle que $q'_n \in g_n(c_n) \cap V'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\epsilon > 1/N$. Comme les c_n sont imbrqués, les $g_n(c_n)$ le sont aussi et pour tout $m, n > N$, on a $q'_n, q'_m \in int(g_N(c_N)) \cup g_N(c_N)$. f est surjective sur V', il existe donc q_n, q_m tels que $f(q_n) = q'_n$ et $f(q_m) = q'_m$ et alors $q_n, q_m \in int(g_N(c_N))$. La suite est de Cauchy et est donc convergente dans $int(C)$. Posons p sa limite. On a montré plus haut que $\{f(q_n)\}$ converge vers $f(p)$, d'où $f(p) = p'$ par unicité de la limite.

L'inverse f^{-1} est continue sur $int(C')$ par le même argument que pour la continuité de f sur $int(C)$. Ceci nous donne l'homéomorphisme entre $int(C)$ et $int(C')$.

Puisque f et C sont quelconques, nous pouvons dire que $int(C')$ est homéomorphe à D^2. Nous avons montré que $int(C)$ est homéomorphe à D^2, tel que voulu.

9 Continuité de f sur C

Afin d'avoir $f(C)$ comme frontière de $int(C')$, il nous faut démontrer que notre extension de f est continue sur C (on sait déjà qu'elle y est bijective).

Soit $\{q_n\} \subset int(C)$ convergeant vers $p \in C$. $\{f(q_n)\}$ est suite dans $int(C') \cup C'$, un fermé borné : elle possède une sous-suite convergente. Sans perte de généralité, supposons que $\{f(q_n)\}$ elle-même converge. Posons p' sa limite.

Nous voulons montrer que $p' = f(p)$. Supposons que $p' \neq f(p)$.

Montrons que p' est élément de C'. Supposons qu'il ne l'est pas. Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de f^{-1} sur $int(C')$, il existe $\delta > 0$ tel que $d(f(q_n), p') < \delta$ implique $d(q_n, f^{-1}(p')) < \epsilon$. Comme $\{f(q_n)\}$ converge vers p', il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m > N$ on ait $d(q_m, f^{-1}(p')) < \delta$, si bien que $\{q_n\}$ converge vers $f^{-1}(p')$. Par unicité de la limite, $f^{-1}(p') = p \in C$. En appliquant f, homéomorphisme sur C, on trouve $p' = f(p)$, contredisant notre hypothèse $p' \neq f(p)$. On a bien $p' \in C$.

Il existe deux arcs dans C' reliant p' et $f(p)$. $f(A)$ étant dense dans C', on peut trouver $f(a_1) \in f(A)$ sur l'un de ces arcs, et $f(a_2) \in f(A)$ sur l'autre. Les points a_1, a_2 sont accessibles à partir de $int(C)$: il existe un arc les reliant, séparant $int(C)$ en deux régions R_1 et R_2. C est séparé en deux arcs joignant a_1 et a_2 : l'un contenant $f^{-1}(p')$ et l'autre p. En appliquant f, $int(C')$ est séparé en deux régions $f(R_1)$ et $f(R_2)$. Le point p' est sur le bord de la région $f(R_2)$: cette région contient une infinité des points de la suite $\{f(q_n)\}$. En appliquant f^{-1}, on obtient que la région R_2 contient une infinité de points de la suite $\{q_n\}$, ce qui est absurde puisque la limite de cette suite, p, est sur l'arc de C ne bornant pas R_1. On doit donc avoir $p' = f(p)$.

On a montré que la convergence d'une suite $\{q_n\} \subset int(C)$ vers $p \in C$ implique que son image $\{f(q_n)\} \in int(C')$ converge vers $f(p) \in C'$. Ceci est équivalent à la continuité de f en $p \in C$. f est donc continue sur C. Il en est de même pour

f^{-1} par le même argument.

10 Conclusion

En plus de nous donner que $int(C) \cup C$ est homéomorphe à $int(C') \cup C'$, cette dernière étape nous donne que tout point $f(p) \in C'$ est limite d'une suite $f(q_n) \in int(C')$: C' est bien la frontière de $int(C')$.

Comme précédemment, C étant quelconque, on applique le résultat à S^1 pour conclure que l'homéomorphisme entre $int(C') \cup C'$ et $D^2 \cup S^1$ envoie C', le bord de $int(C')$, sur S^1.

En composant les homéomorphismes, on obtient le résultat : $int(C) \cup C$ est homéormorphe à $D^2 \cup S^1$, avec $int(C)$ homéomorphe à D^2. $\square$

Références

[1] Jean GALLIER et Diana XU : *A Guide to the Classification Theorem for Compact Surfaces*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2013.

[2] Carsten THOMASSEN : The Jordan-Schonflies theorem and the classification of surface. *The American Mathematical Monthly*, 99(2):116–131, 1992.