

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

TRIANGULATION DES VARIÉTÉS TOPOLOGIQUES :
DE LA TOPOLOGIE GÉOMÉTRIQUE À L'HOMOLOGIE DE FLOER

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
PATRICIA SORYA

FÉVRIER 2022
(mise à jour Août 2022)

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier M. Olivier Collin, mon directeur de mémoire, qui depuis mes premiers pas en mathématiques encourage ma persévérance et m'incite à me dépasser. Je remercie également M. Steven Boyer qui a éveillé ma curiosité pour la topologie de basse dimension, ainsi que M. Duncan McCoy qui même à distance a su soutenir mon intérêt pour ce domaine fascinant. Merci aussi à mes collègues de bureau virtuels et physiques : Vladimir Sarde pour son soutien à travers les moments algébriquement et motivationnellement difficiles, Amine Sadiqi pour sa plume inspirante, ainsi que Jacob Brownie et Dan Rădulescu pour leurs conseils candides m'ayant souvent aiguillée dans la bonne direction.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	ix
RÉSUMÉ	xi
INTRODUCTION	1
PARTIE I TRIANGULATION EN DIMENSIONS 2, 3 ET 4	
CHAPITRE I DÉFINITIONS	7
1.1 Complexes simpliciaux	7
1.2 Variétés topologiques	10
CHAPITRE II TRIANGULATION EN DIMENSION 2	11
2.1 Théorème de Jordan-Schoenflies	11
2.2 Théorème de Radó	12
2.2.1 Finitude de l'intersection entre les bords des ouverts du recouvrement	13
2.2.2 Application du théorème de Jordan-Schoenflies	16
CHAPITRE III TRIANGULATION EN DIMENSION 3	19
3.1 Théorème de Schoenflies généralisé	19
3.2 Théorème du lacet de Papakyriakopoulos	20
3.3 Théorème de Moise	21
3.3.1 Démonstration du théorème de Moise	21
3.3.2 Complexe simplicial homéomorphe à un ouvert	25
3.3.3 Approximation linéaire par morceaux	27
CHAPITRE IV TRIANGULATION EN DIMENSION 4	37
4.1 Signature d'une variété de dimension 4	37
4.2 Théorème de Rokhlin	38
4.3 Variété de Freedman	38
4.4 Existence de variétés non triangulable en dimension 4	39
4.4.1 Application du théorème de Poincaré-Perelman	40
4.5 De la topologie géométrique à la topologie algébrique	44
PARTIE II TRIANGULATION EN DIMENSIONS 5 ET PLUS	
CHAPITRE V OBSTRUCTIONS ET LE GROUPE DE COBORDISME D'HOMOLOGIE	47
5.1 Groupe de cobordisme d'homologie	47
5.2 Structures linéaires par morceaux	49
5.2.1 Définitions topologiques et homotopiques	50

5.2.2	Équivalence des définitions	51
5.2.3	Théorèmes de structure d'un produit et de s -cobordisme	53
5.2.4	Obstruction à l'existence d'une section	54
5.2.5	Obstruction de Kirby-Siebenmann	55
5.2.6	Obstruction de Cohen-Martin-Sato-Sullivan	56
5.2.7	Homomorphisme de Rokhlin	59
5.3	Caractérisation de l'existence des triangulations de variétés topologiques . .	61
5.3.1	Obstruction de Galewski-Stern-Matsumoto	62
5.3.2	Démonstration du théorème de Galewski-Stern-Matsumoto	64
CHAPITRE VI STRUCTURES SPIN ET SPIN ^C		67
6.1	Groupes $\text{Pin}(n)$ et $\text{Spin}(n)$	67
6.2	Revêtement universel de $SO(n)$	69
6.3	Structure spin	71
6.3.1	Structure spin d'un complexe CW	71
6.3.2	Structure spin d'une variété lisse	73
6.4	Structure spin ^c	73
6.4.1	Isomorphisme $PU(2) \cong SO(3)$	78
6.4.2	Isomorphisme de pullbacks	79
CHAPITRE VII HOMOLOGIE DE FLOER		81
7.1	Espace affine des connexions spin ^c	82
7.2	Équations de Seiberg-Witten	83
7.3	Action du groupe de jauge	84
7.4	Champ de vecteurs invariant	85
7.5	Éclatement	86
7.6	Champ de vecteurs éclaté	87
7.7	Complexes de chaînes	88
7.7.1	Groupes de chaînes	88
7.7.2	Gradation relative	89
7.7.3	Opérateurs de bord	91
7.8	Homologie de Floer	91
7.8.1	Structure de module	92
7.8.2	Longue suite exacte	92
7.9	Homologie de Floer de sphères d'homologie	94
7.9.1	Solutions réductibles	94
7.9.2	Groupe d'homologie $\overline{HM}(Y)$	95
7.9.3	Structure de module	95
7.9.4	Invariant de Frøyshov	96
7.9.5	Gradation absolue	98
7.10	Homologie de Floer de la sphère	100
7.10.1	Solutions irréductibles	100
7.10.2	Groupes d'homologie $\widehat{HM}(S^3)$ et $\widetilde{HM}(S^3)$	101
7.10.3	Gradation absolue	101
7.10.4	Invariant de Frøyshov	102

7.11	Vers l'invariant de Manolescu	103
CHAPITRE VIII HOMOLOGIE DE FLOER $\text{Pin}(2)$ -ÉQUIVARIANTE		105
8.1	Équivariance $\text{Pin}(2)$	105
8.1.1	Groupe $\text{Pin}(2)$	105
8.1.2	Action de $\text{Pin}(2)$	107
8.1.3	Structures spin^c autoconjuguées	108
8.1.4	Espaces propres de l'opérateur de Dirac	110
8.1.5	Équations de Seiberg-Witten	111
8.2	Théorie de Morse-Bott	113
8.2.1	Groupes de chaînes	113
8.2.2	Opérateur de bord	115
8.3	Homologie $\text{Pin}(2)$ -équivariante	116
8.3.1	Complexe de chaînes	116
8.3.2	Groupes d'homologie $\text{Pin}(2)$ -équivariants	118
8.3.3	Structure de module	118
8.3.4	Longue suite exacte	119
8.4	Homologie $\text{Pin}(2)$ -équivariante de sphères d'homologie	119
8.4.1	Variétés critiques	119
8.4.2	Groupe d'homologie $\overline{HS}(Y)$	120
8.4.3	Gradation absolue	122
CHAPITRE IX NON-TRIANGULATION EN DIMENSIONS 5 ET PLUS . . .		123
9.1	Invariants de Manolescu	123
9.2	Existence de variétés non triangulables en dimensions 5 et plus	125
CONCLUSION		127
RÉFÉRENCES		129

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
2.1	Élimination d'un segment L en commun 14
2.2	Un segment $\gamma_j([r_n, s_n])$ et ses extrémités u_n, v_n 15
2.3	Remplacement de Q_i' par Q_i'' 16
2.4	∂Q sépare la région grise en deux régions délimitées par les segments rejoignant les points p, r, s et q, s, r 17
2.5	Exemple de triangulation pour deux ouverts s'intersectant 18
3.1	La sphère cornue d'Alexandre 20
3.2	Les complexes K_1 et K_1' 22
3.3	V est voisinage de $N_{n+1} \cap \partial K_n $ et est ouvert dans $ K_n $ 22
3.4	Les complexes L et L' 23
3.5	Le sous-complexe K_n'' 24
3.6	Les complexes K_{n+1} et K_{n+1}' 24
3.7	Coupe transversale de N' 29
3.8	Composition des homotopies G et H 29
3.9	Un exemple de N_σ (en ombragé), où σ est le 2-simplexe du haut. Des demi-arêtes ayant un sommet en commun avec le 3-simplexe sont illustrées. 31
3.10	Un voisinage V_σ et son intersection avec $f(N)$ 32
3.11	Modification de $f _{C_v}$ 33
3.12	C_v, C_w autour d'un D_e et C'_v, C'_w vus de biais et de côté. 34
3.13	$f(C_v), f(C_w)$ autour d'un D_e et C''_v, C''_w 35

RÉSUMÉ

Nous passons en revue les travaux menant à la résolution de la conjecture de triangulation des variétés topologiques. Nous traitons le problème indépendamment pour chacune des dimensions 2, 3 et 4 et pour les dimensions 5 et plus. Pour chaque cas, nous présentons les outils conduisant aux résultats principaux et explicitons leur application à la conjecture de triangulation. En particulier, le cas en dimensions 5 et plus est étudié en détail, notre discussion passant entre autres par le lien entre le groupe de cobordisme d'homologie et le problème de triangulation, pour se rendre jusqu'au développement de l'homologie de Floer $\text{Pin}(2)$ -équivariante.

Mots-clés : topologie, triangulation, complexe simplicial, variété topologique, homologie de Floer.

INTRODUCTION

Une variété topologique est un espace qui possède localement la structure d'un espace euclidien. En 1925, dans *Die Topologie der Mannigfaltigkeiten*, Hellmut Kneser décrit la décomposition de variétés topologiques en blocs élémentaires. Ces blocs, appelés *simplexes*, munissent une variété ainsi décomposée d'une *triangulation*. Cette dernière confère à la variété une structure combinatoire facilitant l'étude de ses propriétés globales. Pour M une variété de dimension n , Kneser écrit : « Daß die beschriebene Zerlegung einer M immer möglich ist, hat bisher nur für $n \leq 2$ allgemein, für höhere Dimension dagegen nur unter erleichternden Voraussetzungen bewiesen werden können.¹ »

Kneser soulève donc la question « Est-ce que toute variété topologique possède une triangulation ? »

Dans cet ouvrage, nous présentons une revue des techniques utilisées au cours des XX^e et XXI^e siècles afin de répondre à cette question, connue sous le nom de *conjecture de triangulation*. Bien que nous ne réclamions pas l'originalité des résultats qui sont exposés, notre présentation est la première, à notre connaissance, à regrouper tous les résultats principaux menant à la résolution de la conjecture de triangulation. Aussi, en plus de détailler les constructions nécessaires et de présenter en détail les démonstrations pertinentes, nous mettons en lumière les liens et implications qui ne sont pas explicités dans la littérature actuelle.

De la démonstration de Radó en dimension 2 à la percée de Manolescu en dimensions 5 et plus, notre présentation s'étend sur près d'un siècle de topologie. Il est donc attendu

1. [Notre traduction] « Le fait qu'une telle décomposition de M existe toujours n'a été démontré que pour $n \leq 2$, alors qu'en dimensions supérieures, il n'a été démontré que dans des conditions particulières. »

que la lectrice ou le lecteur soit familière ou familier avec les notions de topologie générale et qu'elle ou il ait à puiser de sources externes pour certaines notions de topologie algébrique et de géométrie différentielle. La vaste étendue de notre exposé confère à chaque chapitre une saveur distincte, de sorte qu'ils peuvent être abordés indépendamment selon l'intérêt de la lectrice ou du lecteur, tout en gardant en tête que les préalables peuvent différer d'un chapitre à l'autre. Notre exposé se voulant le plus autonome possible, nous définissons toute notion spécifique à notre discussion et toute assertion est soit démontrée, soit accompagnée d'une référence.

Notre ouvrage est divisé en deux parties : la première traite de la triangulation des variétés de dimension 2, 3 et 4 alors que la deuxième est consacrée aux variétés de dimensions 5 et plus.

Dans la première partie, la triangulation est directement abordée. Après un premier chapitre introduisant les concepts de complexes simpliciaux et de variétés topologiques, nous construisons aux chapitres 2 et 3 une triangulation pour toute variété de dimensions 2 et 3 (Radó, 1925 ; Moise, 1952). Nous y adaptons les textes de la littérature dans un langage concis de topologie générale en évitant d'introduire une terminologie superflue et en agrémentant le tout de figures. En dimension 4, la topologie algébrique entre en scène avec la notion de signature, le théorème de Rokhlin et le théorème de Poincaré-Perelman. Ce dernier, résolvant la conjecture de Poincaré au tournant du XXI^e siècle, mène à une démonstration efficace de la non-triangulabilité de la variété E8 de Freedman, originalement démontrée par Casson en 1985. Nous consacrons une section du chapitre 4 à articuler la transition entre la topologie géométrique et la topologie algébrique d'un complexe simplicial, ce qui nous permet d'appliquer le fameux théorème.

La deuxième partie explore la conjecture de triangulation en dimensions 5 et plus. Deux grandes étapes ont permis d'élucider cette dernière : sa réduction à un problème de dimension 3, puis le développement et l'application d'une version involutive de l'homologie de Floer.

Le chapitre 5 porte sur la première étape. Après avoir défini le groupe de cobordisme

d'homologie en dimension 3, nous montrons comment les structures linéaires par morceaux (PL) peuvent être vues sous une perspective homotopique. Nous définissons les invariants de Kirby-Siebenmann et de Cohen-Martin-Sato-Sullivan qui relient les structures de variété topologique et de triangulation aux structures PL. Ceux-ci mènent au théorème de caractérisation de l'existence de triangulations de Galewski, Stern et Matumoto (Galewski et Stern, 1980 ; Matumoto, 1978), ce qui dirige notre attention sur l'étude du groupe de cobordisme d'homologie en dimension 3.

Ce n'est que plus de trente ans après l'avancée de Galewski, Stern et Matumoto que Manolescu développe l'homologie de Floer $\text{Pin}(2)$ -équivariante qui permet de clore la discussion sur la triangulation des variétés. En vue d'aborder ce sujet, nous révisons d'abord les concepts de structures spin et spin^c au chapitre 6. En plus d'y passer en revue les résultats classiques portant sur le revêtement double $\text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ et les classes caractéristiques, nous y démontrons aussi l'équivalence entre les définitions de structure spin^c en tant que fibré Spin^c -principal et en tant que fibré hermitien de rang 2 pour les variétés de dimension 3. Cette étape permet d'adapter les discussions qui suivent selon la définition se prêtant le mieux à la situation.

Aux chapitres 7 et 8, nous décrivons l'homologie de Floer version Seiberg-Witten (aussi appelée homologie de Floer *monopole*) et l'homologie de Floer $\text{Pin}(2)$ -équivariante telles que développées par Kronheimer et Mrowka en 2007 et Lin en 2015 respectivement. Nous avons opté pour l'approche de Lin, développée après la découverte originale de Manolescu, compte tenu de sa calculabilité et de sa généralisation au-delà du contexte des sphères d'homologie. Ces homologies sont obtenues en considérant l'ensemble des solutions à un système d'équations – les équations de Seiberg-Witten – analogue au gradient d'une fonction de Morse. Nous les présentons d'abord pour le cas général d'une variété de dimension 3, puis nous montrons leur application au cas particulier des sphères d'homologie. Notre objectif étant de mettre en valeur les techniques employées pour l'étude du groupe de cobordisme d'homologie, notre traitement du cas général se contente d'introduire les objets et ingrédients pertinents. Le fait que ceux-ci soient bien définis découle d'importants résultats analytiques : la lectrice et le lecteur intéressés pourront

consulter les références principales citées dans le texte.

Au chapitre 9, nous aboutissons à la résolution de la conjecture de triangulation. Nous identifions les invariants de Manolescu émanant de l'homologie $\text{Pin}(2)$ -équivariante, puis nous exploitons leurs propriétés afin de montrer l'existence de variétés non triangulables en dimension 5 et plus (Manolescu, 2015). Finalement, la discussion s'achève avec une construction explicite remontant à Galewski et Stern (Galewski et Stern, 1979) de variétés non triangulables pour chaque dimension $n \geq 5$.

Nous espérons que cet ouvrage sera utile à quiconque voudrait comprendre l'existence de triangulations pour les variétés topologiques, en offrant une base solide pour apprécier les raisonnements et les outils exploités. De plus, notre exposé est une illustration notoire de l'étendue des avancées du dernier siècle en topologie de basse dimension. À cet égard, il se veut aussi être une source d'exemples d'application des techniques dans le domaine.

PREMIÈRE PARTIE

TRIANGULATION EN DIMENSIONS 2, 3 ET 4

CHAPITRE I

DÉFINITIONS

1.1 Complexes simpliciaux

Définition 1.1.1. Soit un ensemble de points en position générale $\{v_0, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq n$. Le n -simplexe $\sigma = v_0 \dots v_n$ est le plus petit sous-ensemble convexe de \mathbb{R}^m contenant $\{v_0, \dots, v_n\}$. Un n -simplexe est de *dimension* n .

Les points v_i sont les *sommets* du simplexe σ .

Une *face* de σ est le plus petit sous-ensemble convexe de \mathbb{R}^m contenant un sous-ensemble de $\{v_0, \dots, v_n\}$. Ces faces sont elles-mêmes des simplexes. Une face de dimension 1 est une *arête*.

Définition 1.1.2. Un *complexe simplicial* K est une collection de simplexes dans \mathbb{R}^m telle que

1. Si un simplexe σ est dans K , toutes les faces de σ sont dans K ;
2. L'intersection $\sigma \cap \tau$ de deux simplexes σ, τ de K est soit vide, soit une face de σ et de τ ;
3. Tout simplexe σ de K possède un voisinage ouvert dans \mathbb{R}^m n'intersectant qu'un nombre fini d'autres simplexes de K .

On écrit $\sigma \in K$ pour indiquer que le simplexe σ appartient au complexe K .

Définition 1.1.3. Deux complexes simpliciaux K et K' sont *isomorphes* s'il existe une bijection f entre l'ensemble des sommets de K et l'ensemble des sommets de K'

et si pour tout simplexe $v_0 \dots v_n \in K$ on a que $f(v_0) \dots f(v_n)$ est simplexe de K' et, réciproquement, si pour tout simplexe $f(v_0) \dots f(v_n) \in K'$ on a que $v_0 \dots v_n$ est simplexe de K .

Définition 1.1.4. Un *sous-complexe* L d'un complexe simplicial K est un complexe simplicial dont les simplexes appartiennent tous à K . On écrit $L < K$.

Définition 1.1.5. Le *i -squelette* d'un complexe simplicial K , noté K^i , est le sous-complexe de K formé des simplexes de K de dimension égale ou inférieure à i .

Définition 1.1.6. L'union des simplexes de K est un espace topologique $|K|$ muni de la topologie induite par celle de \mathbb{R}^m . $|K|$ est la *réalisation géométrique* de K . Selon le contexte, on omettra parfois la notation $|\cdot|$.

Définition 1.1.7. Si L et K sont des complexes simpliciaux tels que $|L| = |K|$ et que les simplexes de L sont contenus dans les simplexes que K , alors L est une *subdivision* de K .

Proposition 1.1.8. *Tout complexe simplicial K possède une subdivision.*

Démonstration. Il suffit de considérer la *subdivision barycentrique* du complexe simplicial. Elle est obtenue en considérant le *barycentre* de chaque simplexe, c'est-à-dire le point de coordonnées $v = \sum_{i=1}^m \frac{1}{n+1} v_i$ pour un n -simplexe de sommets $\{v_1, \dots, v_n\}$. Posons $K_0 = K$. Par récurrence sur i , on forme les joints $v * \sigma^i$ pour v barycentre d'un $(i+1)$ -simplexe et $\sigma^i \subset \sigma^{i+1}$ pour obtenir un complexe K_{i+1} à partir de K_i . \square

Définition 1.1.9. Le *voisinage étoilé* d'un simplexe $\sigma \in K$ est l'union des simplexes de K ayant σ comme face.

Le *lien* d'un simplexe $\sigma \in K$ est l'union des simplexes de K qui n'ont pas de face en commun avec σ et qui sont face d'un simplexe ayant σ comme face.

On note $\overline{St}(\sigma)$ pour la réalisation géométrique du voisinage étoilé de σ et $St(\sigma)$ pour l'union de l'intérieur des simplexes de $\overline{St}(\sigma)$. On note $Lk(\sigma)$ pour la réalisation géométrique du lien de σ .

Proposition 1.1.10. $\overline{St}(\sigma) \cong Lk(\sigma) * \sigma$, où $*$ dénote le joint topologique.

Démonstration. Si deux simplexes disjoints sont faces d'un même simplexe, alors leur joint est face de ce simplexe. Par exemple, pour le simplexe $v_0v_1 \dots v_n$, le joint de ses faces $v_0v_1 \dots v_k$ et $v_{k+1} \dots v_l$, $0 \leq k \leq l \leq n$, est égal au simplexe $v_0v_1 \dots v_kv_{k+1} \dots v_l$ qui est bien face de $v_0v_1 \dots v_n$. Ainsi, si τ est un simplexe disjoint de σ mais qui est face d'un simplexe contenant σ , le joint $\tau * \sigma$ est dans $\overline{St}(\sigma)$. Puisque le lien est formé de tous les simplexes respectant la description de τ , on a $Lk(\sigma) * \sigma \cong \overline{St}(\sigma)$. \square

Définition 1.1.11. Soit $X \subset |K|$, où K est un complexe simplicial. Un *voisinage simplicial* de X est le sous-complexe $L < K$ dont les simplexes sont faces d'un simplexe intersectant X .

Définition 1.1.12. Soit σ un simplexe. Une fonction $f : \sigma \rightarrow \mathbb{R}^m$ est *linéaire* si les coordonnées de $f(x)$ peuvent être exprimées comme une fonction linéaire des coordonnées de x pour tout $x \in \sigma$. Autrement dit, si $x = \sum_{i=1}^m a_i e_i$, $a_i \in \mathbb{R}$, et $f(x) = \sum_{i=1}^m b_i e_i$, $b_i \in \mathbb{R}$, pour une base $\{e_1, \dots, e_m\}$ de \mathbb{R}^m , alors $b_i = \sum_{j=1}^m c_j a_j + d_i$ pour des $c_i, d_i \in \mathbb{R}$.

En particulier, si les coordonnées barycentriques de tout $x \in \sigma$ sont égales à celles de $f(x) \in f(\sigma)$, f est linéaire.

Une fonction $f : |K| \rightarrow \mathbb{R}^m$ est *linéaire par morceaux* (ou PL pour *piecewise linear*) s'il existe une subdivision L de K telle que $f|_\sigma$ est linéaire pour tout $\sigma \in L$.

Remarque. Si $f(|K|)$ est contenu dans un complexe simplicial $K' \subset \mathbb{R}^m$ et si les coordonnées barycentriques de $f(\sigma)$ sont égales à celles de σ pour tout simplexe $\sigma \in L$ une subdivision de K , alors f est PL.

Si X est un espace topologique homéomorphe à un complexe simplicial K via un homéomorphisme φ , alors une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ est *linéaire par morceaux* si $f \circ \varphi^{-1} : |K| \rightarrow \mathbb{R}^m$ est linéaire par morceaux.

Si $f : X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$ est un homéomorphisme entre espaces homéomorphes à des

complexes simpliciaux et si f est linéaire par morceaux, alors f est un *homéomorphisme linéaire par morceaux*. On dira alors que X et Y sont *homéomorphes PL*.

1.2 Variétés topologiques

Définition 1.2.1. Une *variété topologique* de dimension n est un espace Hausdorff paracompact dont chaque point possède un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^n .

En particulier, une variété topologique est localement euclidienne. Ainsi, tout recouvrement ouvert d'une variété possède un sous-recouvrement dénombrable car un espace localement euclidien et paracompact est de Lindelöf.

Définition 1.2.2. Une variété topologique M possède une *triangulation* (ou est *triangulable*) s'il existe un complexe simplicial K tel que $M \cong |K|$.

Définition 1.2.3. Une variété topologique M possède une structure *lisse* si elle possède un atlas $\{U_\alpha \cong \mathbb{R}^n\}$ dont les fonctions de transition sont lisses.

Définition 1.2.4. Une variété topologique M possède une structure linéaire par morceaux (PL) si elle satisfait aux conditions suivantes, équivalentes entre elles :

1. M possède un atlas $\{U_\alpha \cong \mathbb{R}^n\}$ dont les fonctions de transition sont linéaires par morceaux.
2. M possède une triangulation dont les liens des sommets sont homéomorphes PL à S^{n-1} .

L'équivalence entre les définitions de structure PL est démontrée à la section 5.2.

J.H.C. Whitehead a démontré (Whitehead, 1940) que toute variété lisse possède une structure PL en construisant une triangulation appropriée. Les travaux de Smale, Cerf, Munkres, Hirsch et Mazur démontrent que la contraposée est vraie seulement en dimensions égale ou inférieures à 7 (Milnor, 2011, Théorème 2).

CHAPITRE II

TRIANGULATION EN DIMENSION 2

2.1 Théorème de Jordan-Schoenflies

Une *surface*, une variété de dimension 2, est triangulable si elle est homéomorphe à un complexe simplicial de dimension 2. Un tel complexe est formé de 2-simplexes, homéomorphes à des disques D^2 et dont les faces forment un 1-complexe homéomorphe à S^1 . Afin de passer de variété à complexe, il nous faudra « découper » la variété en des pièces homéomorphes à D^2 .

À la fin du XIX^e siècle, Camille Jordan tente de démontrer qu'une courbe simple fermée dans S^2 , c'est-à-dire l'image d'un plongement $S^1 \hookrightarrow S^2$, sépare S^2 en deux régions, c'est-à-dire que $S^2 \setminus S^1$ est constitué de deux composantes connexes. Cet énoncé en apparence simple se révèle être ardu à établir, à un point tel que la démonstration de Jordan s'avère erronée. Ce n'est qu'un quart de siècle plus tard qu'elle fut complétée par Arthur Schoenflies, qui montre en plus que ces régions sont homéomorphes à des disques. C'est ce théorème, fondamental en topologie de basse dimension, qui nous permettra de construire l'homéomorphisme entre une surface et un complexe simplicial de dimension 2.

Théorème 2.1.1 (Théorème de Jordan-Schoenflies). *Soit une courbe simple fermée C sur une sphère S^2 . La courbe C sépare S^2 en deux composantes connexes, chacune homéomorphe à un disque ouvert D^2 .*

En retirant un point de S^2 pour obtenir un plan \mathbb{R}^2 , on a que C délimite un disque D^2

dans \mathbb{R}^2 .

Une démonstration accessible du théorème peut être consultée dans Thomassen, 1992, Sections 2 et 3.

2.2 Théorème de Radó

Théorème 2.2.1 (Radó, 1925). *Toute surface possède une triangulation.*

L'existence d'une triangulation pour une surface S se traduit par le fait qu'il existe un recouvrement $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de S et des homéomorphismes $f_i : T_i \rightarrow T'_i \subset \mathbb{R}^2$ tels que T'_i soit un triangle du plan. De plus, pour T_i, T_j éléments distincts de la triangulation, T_i, T_j sont soit disjoints, soit ont un point en commun, ou alors ils ont l'image par f_i^{-1} d'une arête de T'_i et l'image par f_j^{-1} d'une arête de T'_j en commun.

Afin de démontrer le théorème de Radó, nous suivons dans ce chapitre l'approche générale de Thomassen (Thomassen, 1992, Section 4) et de Gallier et Xu (Gallier et Xu, 2013, Chapitre E) que nous présentons dans un langage de topologie générale afin de rendre la discussion accessible et autonome.

La stratégie de la démonstration consiste à partitionner la surface en régions homéomorphes à des polygones du plan. Il s'agit de trouver un recouvrement dont les éléments ont des bords qui s'intersectent en un nombre fini de fois. Ensuite, on construit des homéomorphismes pour obtenir la triangulation voulue.

Soit S une surface. Soit $\bigcup_{p \in S} U_p$ un recouvrement ouvert de S , où U_p est voisinage de $p \in S$ homéomorphe au disque ouvert D^2 . Dans chaque U_p , on considère Q_p contenant p et homéomorphe à un disque fermé. Par paracompacité de S , on extrait du recouvrement ouvert $\bigcup_{p \in S} \text{int}(Q_p)$ un sous-recouvrement dénombrable $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{int}(Q_i)$, où $\text{int}(Q_i) \in \{\text{int}(Q_p), p \in S\}$. Notons U_i les ouverts U_p contenant les Q_i du sous-recouvrement dénombrable. Supposons que les homéomorphismes $\varphi_i : U_i \rightarrow D^2$ aient des images deux à deux disjointes dans \mathbb{R}^2 . Posons $\tilde{Q}_i = \varphi(Q_i)$.

2.2.1 Finitude de l'intersection entre les bords des ouverts du recouvrement

Les bords $\partial\widetilde{Q}_i$ sont des courbes fermées simples. On veut montrer qu'on peut choisir les $\text{int}(\widetilde{Q}_i) \subset D_i$ de sorte que les images de leurs bords par les φ_i^{-1} respectifs s'intersectent en un nombre fini de points sur S . Par continuité, on a $\varphi_i^{-1}\partial\widetilde{Q}_i = \partial Q_i \subset S$ et $\varphi_i^{-1}\text{int}(\widetilde{Q}_i) = \text{int}(Q_i) \subset S$.

Proposition 2.2.2. *Il existe un recouvrement $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{int}(Q_i)$ tel que pour tout $i, j \in \mathbb{N}$,*

$$|\partial Q_i \cap \partial Q_j| < \infty.$$

Afin d'obtenir ce résultat, nous démontrons d'abord deux lemmes en supposant qu'il existe i, j tels que $|\partial Q_i \cap \partial Q_j| = \infty$. Fixons une paramétrisation $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \partial Q_i$ de $\partial Q_i \cong S^1$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

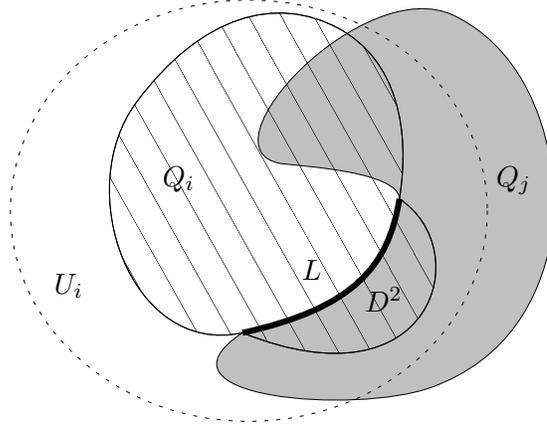
Définition 2.2.3. Soit une paramétrisation de $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^1$ de S^1 . Un *segment* est l'image par γ d'un sous-intervalle fermé de $[0, 1]$, c'est-à-dire un ensemble $\gamma([a, b])$ pour $[a, b] \subset [0, 1]$.

Lemme 2.2.4. *On peut supposer que $|\partial Q_i \cap \partial Q_j|$ ne contient pas de segments $\gamma_i([a, b]) = \gamma_j([a', b'])$.*

Démonstration. Si $|\partial Q_i \cap \partial Q_j|$ contient un segment $L = \gamma_i([a, b]) = \gamma_j([a', b'])$, il suffit de remplacer Q_i par $Q_i \cup D^2$ obtenu de la façon suivante. On attache $[0, 1]$ le long de $\partial L \subset \partial Q_i$, puis un disque le long de $[0, 1] \cup L$, de sorte que $Q_i \cup D^2$ ainsi obtenu soit contenu dans U_i (Fig. 2.1). \square

Considérons un fermé $\widetilde{Q}'_i \subset D_i$ tel que $\widetilde{Q}'_i \subset \text{int}(\widetilde{Q}_i)$. Remplacer $\text{int}(Q_i)$ par $\text{int}(Q'_i)$ nous donne encore un recouvrement de S .

On fixe une paramétrisation $\gamma'_i : [0, 1] \rightarrow \partial Q'_i$ de $\partial Q'_i \cong S^1$.

FIGURE 2.1 – Élimination d'un segment L en commun

Soit ϵ la distance minimale entre un point de ∂Q_i et un point de $\partial Q'_i$, c'est-à-dire

$$\text{dist}(\partial Q_i, \partial Q'_i) = \epsilon.$$

Il existe une infinité de segments de ∂Q_j dans $S \setminus \text{int}(Q_i)$, puisqu'il existe une infinité de t tels que $\gamma_j(t) \in |\partial Q_i \cap \partial Q_j|$ par hypothèse.

Lemme 2.2.5. *Il existe un nombre fini de segments $\gamma_j([a, b])$ de ∂Q_j tels que (Fig. 2.2)*

1. $\gamma_j([a, b]) \subset S \setminus \text{int}(Q_i)$,
2. $\gamma_j(a), \gamma_j(b) \in \partial Q_i \cap \partial Q_j$,
3. $\gamma_j([a, b]) \cap \partial Q'_i \neq \emptyset$.

Démonstration. Supposons qu'il existe un nombre infini de segments tels que décrits dans l'énoncé. Considérons un sous-ensemble infini dénombrable, qui ont des extrémités $\gamma_j(r_n) = u_n, \gamma_j(s_n) = v_n \in \partial Q_i$ de sorte que $r_n < s_n < r_{n+1} < s_{n+1}$ dans $[0, 1]$ (Fig. 2.2). On peut supposer que $\gamma_j(0) = \gamma_j(1) \in \text{int}(Q_i)$ si bien que $r_n, s_n \neq 0, 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\{p_n\}$ la suite donnée par $p_{2n-1} = u_n$ et $p_{2n} = v_n$.

On peut supposer que cette suite converge vers un $\gamma_j(t_0) = p \in \partial Q_i \cap \partial Q_j$, puisque $\partial Q_i \cap \partial Q_j$ est un compact de S par continuité de $\varphi_i^{-1}, \varphi_j^{-1}$ (avec $\partial \tilde{Q}_i, \partial \tilde{Q}_j$ étant des

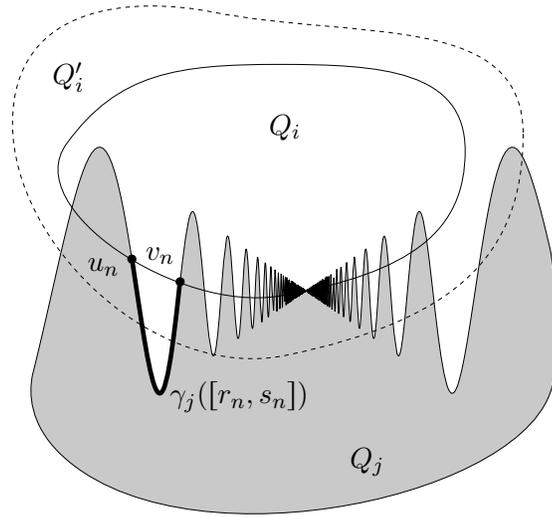


FIGURE 2.2 – Un segment $\gamma_j([r_n, s_n])$ et ses extrémités u_n, v_n

compacts de \mathbb{R}^2). Les sous-suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ convergent aussi vers p , par unicité de la limite. Par continuité de γ_j^{-1} sur $(0, 1)$, les suites $\{r_n\}$ et $\{s_n\}$ convergent vers t_0 .

Par continuité de γ_j , il existe $\delta > 0$ tel que $|t - t_0| < \delta$ implique que $\gamma(t)$, un point de ∂Q_j , soit contenu dans la boule ouverte $B(p, \epsilon/2)$.

Par convergence des suites $\{r_n\}$ et $\{s_n\}$ vers t_0 , l'intervalle $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ contient un couple r_k, s_k . Par continuité de γ_j , on a $[r_k, s_k] \subset (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Ainsi, le segment d'extrémités u_k, v_k est contenu dans $B(p, \epsilon/2)$.

Or, $B(p, \epsilon/2)$ n'intersecte pas $\partial Q'_i$. Par conséquent, le segment d'extrémités u_k, v_k n'intersecte pas $\partial Q'_i$, contredisant la définition des u_n, v_n . \square

Démonstration. (Proposition 2.2.2) Le lemme précédent nous permet de conclure la démonstration de la proposition. Il nous donne que $\partial Q'_i$ n'intersecte pas une infinité des segments de ∂Q_j qui intersectent ∂Q_i : on remplace Q_i par Q'_i dans le recouvrement de S . Or, il se peut que $\partial Q'_i$ intersecte ∂Q_j une infinité de fois en d'autres segments ou qu'il intersecte un autre $\partial Q_k, k \neq i, j$ une infinité de fois. On considère alors un nouveau fermé Q''_i dans U_i tel que $Q''_i \supset \text{int}(Q'_i)$, ou alors tel que $Q_i \subset \text{int}(Q''_i) \subset Q''_i \subset \text{int}(Q'_i)$ (Fig.

2.3). Le bord $\partial Q_i''$ intersecte ∂Q_j un nombre fini de fois par le même raisonnement que dans la démonstration du lemme. On remplace alors Q_i' par Q_i'' dans le recouvrement. Si $\partial Q_i''$ intersecte un nombre infini de fois un ∂Q_k , on applique le même raisonnement en remplaçant le rôle de Q_i' par Q_i'' . Cette procédure aboutit après un nombre fini de fois pour chaque $i \in \mathbb{N}$, par paracompacité de S . \square

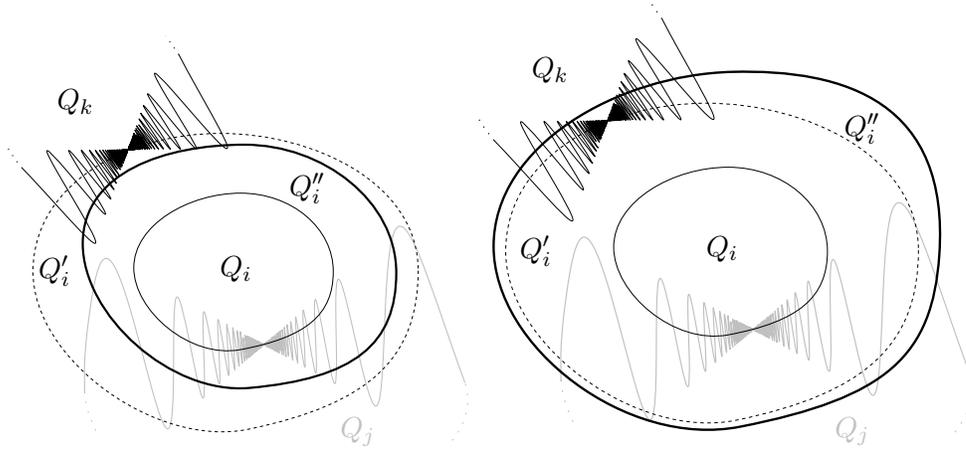


FIGURE 2.3 – Remplacement de Q_i' par Q_i''

2.2.2 Application du théorème de Jordan-Schoenflies

Démonstration. (Théorème 2.2.1) Soit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{int}(Q_i)$ un recouvrement de S tel que $|\partial Q_i \cap \partial Q_j| < \infty$. Considérons

$$\widetilde{Q}_i \cap \varphi_i \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \partial Q_j \right) \subset \mathbb{R}^2.$$

Il s'agit de l'image dans \widetilde{Q}_i des ∂Q_j intersectant Q_i sur S . Cet ensemble peut être vu comme un nombre fini de segments qui partitionnent \widetilde{Q}_i en régions. Ces dernières sont délimitées par des courbes fermées simples, en l'occurrence des segments des $\varphi_i(\partial Q_j)$ et de $\partial \widetilde{Q}_i$.

Soit C une de ces courbes et soit m le nombre de points de C qui sont éléments d'une intersection $\varphi_i(\partial Q_j) \cap \varphi_i(\partial Q_k)$, $j, k \in \mathbb{N}$. On peut supposer que $m \geq 3$. En effet, si $m = 2$, alors la région délimitée par $\varphi^{-1}C$ est contenue dans un $\text{int}(Q_l)$, $l \neq j, k$; il suffit

d'ajouter un ouvert Q au recouvrement, de sorte qu'exactement un des deux points de $\partial Q_j \cap \partial Q_k$ soit contenu dans Q et $Q \subset \text{int}(Q_l)$ (Fig. 2.4). Si $m = 1$ ou 0 , alors $\varphi^{-1}C$ est bord d'un Q_i inclus dans un autre ouvert du recouvrement ou bien, pour le cas $m = 0$, S est une sphère recouverte par deux ouverts Q_1 et Q_2 : il suffit de ne pas considérer Q_i dans le recouvrement de S et dans le cas de la sphère, on ajoute un ouvert dont le bord intersecte ∂Q_1 et ∂Q_2 en deux points chacun, ce qui ramène au cas $m = 2$.

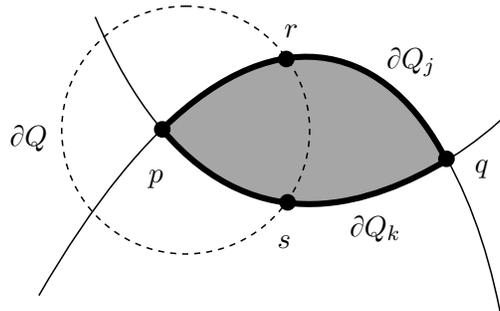


FIGURE 2.4 – ∂Q sépare la région grise en deux régions délimitées par les segments rejoignant les points p, r, s et q, s, r

Par le théorème de Jordan-Schoenflies (Théorème 2.1.1), C délimite une région homéomorphe à un polygone régulier de m côtés, où chaque côté est homéomorphe à un segment de C délimité par des points appartenant à une intersection $\varphi_i(\partial Q_j) \cap \varphi_i(\partial Q_k)$, $j, k \in \mathbb{N}$.

On peut supposer que les homéomorphismes ainsi obtenus entre chaque région et un polygone donnent comme images des polygones deux à deux disjoints dans \mathbb{R}^2 . On triangule les polygones de plus de trois côtés en formant les joints d'un point de l'intérieur avec chacune des arêtes. En identifiant les côtés provenant de régions adjacentes et en identifiant les polygones provenant d'une même intersection $Q_i \cap Q_j$, on obtient la triangulation voulue (Fig. 2.5). \square

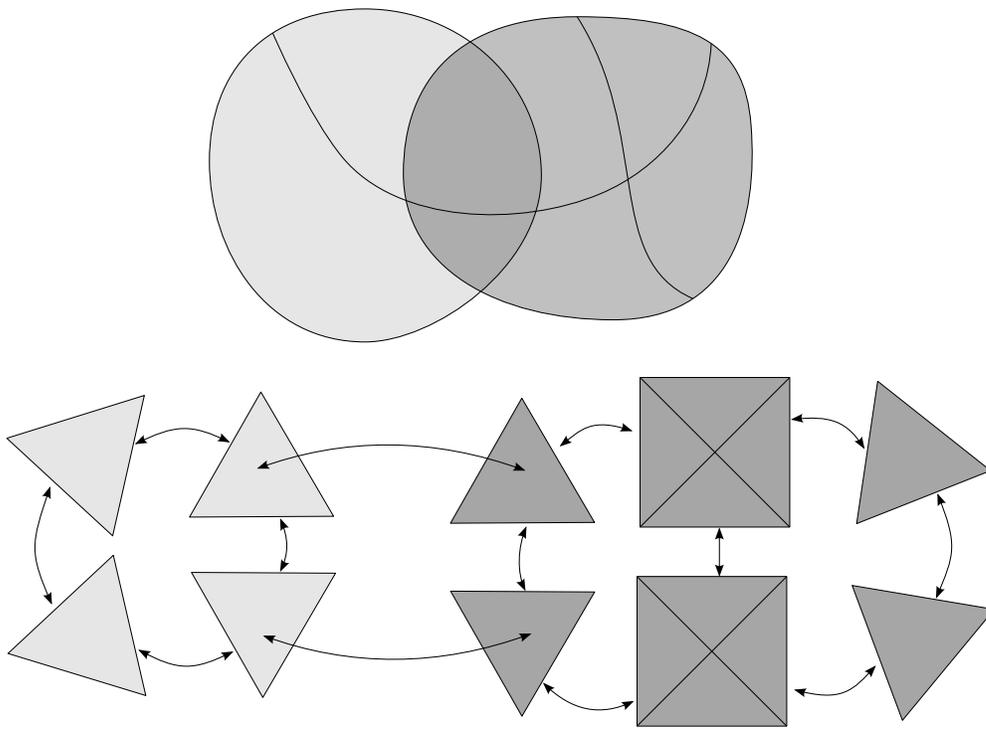


FIGURE 2.5 – Exemple de triangulation pour deux ouverts s'intersectant

CHAPITRE III

TRIANGULATION EN DIMENSION 3

3.1 Théorème de Schoenflies généralisé

En dimension 2, l'existence de triangulations s'appuie sur le théorème de Jordan-Schoenflies qui ne se généralise pas en dimensions supérieures à moins d'y ajouter une condition sur la sphère $S^{n-1} \subset S^n$.

Théorème 3.1.1 (Théorème de Schoenflies généralisé, Brown, 1960). *Soit une sphère $S^{n-1} \subset S^n$. Si S^{n-1} est à bicollier dans S^n , alors elle divise S^n en deux composantes connexes, chacune homéomorphe à une boule de dimension n .*

Par « à bicollier », on veut dire qu'il existe un plongement $i : S^{n-1} \times [-1, 1] \rightarrow S^n$ tel que $i(S^{n-1} \times 0) = S^{n-1}$. La *sphère cornue d'Alexandre* est un fameux contre-exemple à l'assertion sans condition de bicollarité (Fig. 3.1). En effet, le groupe fondamental de l'une des composantes du complément de la sphère cornue dans S^3 n'est pas finiment engendré (il faut un générateur pour chaque « corne ») ; cette composante ne peut être une boule de dimension 3, dont le groupe fondamental est trivial.

Si on répétait la stratégie vue au chapitre précédent pour les variétés de dimension 3, on se heurterait à cette condition de bicollarité lorsque vient le temps de considérer des sphères délimitant des régions des boules du recouvrement. Rien ne garantit que ces sphères possèdent un voisinage homéomorphe à $S^{n-1} \times [-1, 1]$. Il n'est donc pas donné que ces régions soient triangulables.

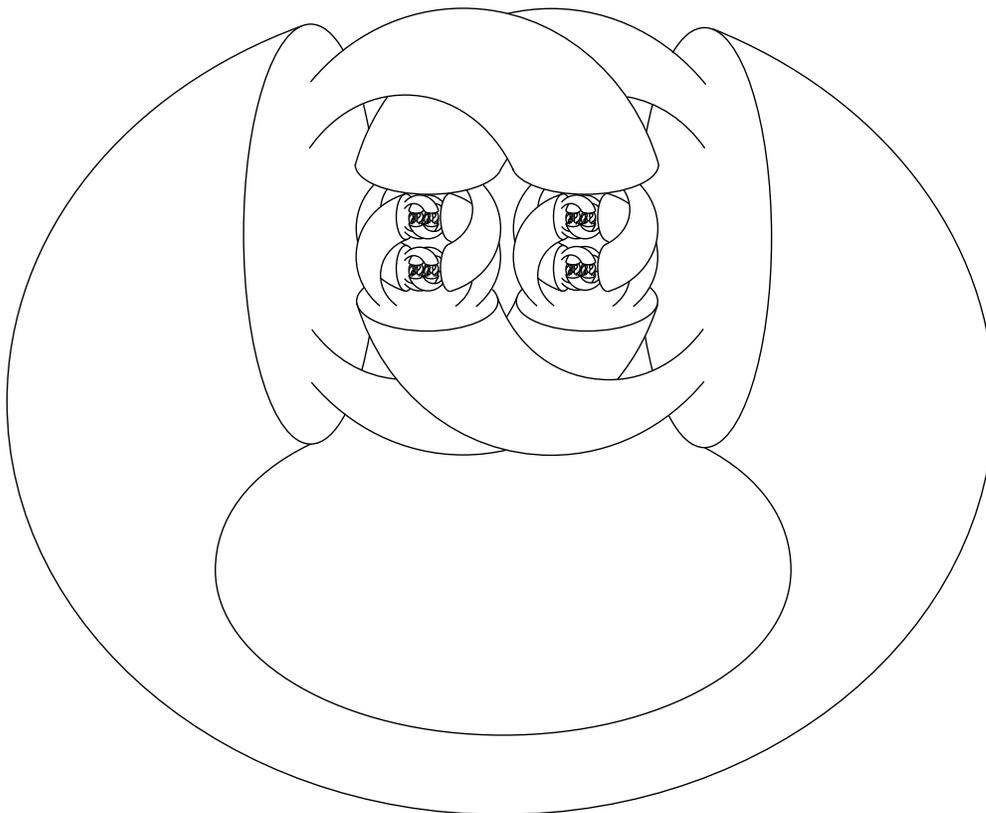


FIGURE 3.1 – La sphère cornue d’Alexandre

3.2 Théorème du lacet de Papakyriakopoulos

Afin de démontrer la triangulation des variétés de dimension 3, on voudra ici encore se ramener à des sous-espaces qu’on sait trianguler. On obtiendra ces derniers grâce au théorème du lacet de Papakyriakopoulos.

Théorème 3.2.1 (*Loop theorem*, Papakyriakopoulos, 1956). *Soit F une surface à deux côtés dans M , une variété de dimension 3. Si l’homomorphisme $\pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M)$ induit par l’inclusion n’a pas un noyau trivial, alors il existe un disque $D^2 \subset M$ tel que $D^2 \cap F = \partial D^2$ et $[\partial D^2] \neq 0 \in \pi_1(F)$.*

Une démonstration complète du théorème est présentée dans Rolfsen, 2003, Appendice B.

3.3 Théorème de Moise

Théorème 3.3.1 (Moise, 1952). *Toute variété de dimension 3 est triangulable.*

L'existence d'une triangulation pour toute variété de dimension 3 a été démontrée pour la première fois par Edwin Moise en 1952 (Moise, 1952), avant la percée de Papakyriakopoulos avec le théorème du lacet. En 1971, Peter Shalen incorpore le théorème du lacet dans une nouvelle démonstration du théorème de Moise (Shalen, 1984). Nous présentons ici la démonstration réinventée en 1977 par Moise lui-même, qui combine ses idées originales à celles de Shalen (Moise, 1977, Théorème 35.3).

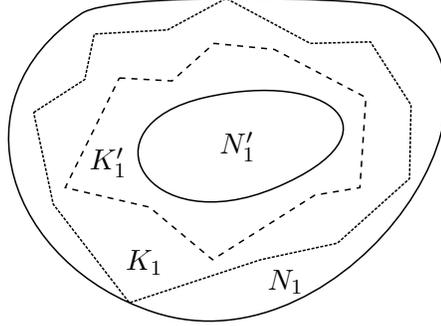
Notre traitement adapte des résultats plus généraux de Moise en des lemmes et propositions qui s'appliquent directement à la démonstration du théorème. De plus, nous employons des notions d'homotopie là où Moise utilise dans son traité de 1977 des constructions détaillées de topologie générale. Une telle approche semble naturelle étant donné que le théorème du lacet est lui-même à saveur homotopique. Aussi, nous agrémentons le tout de figures. Notons que bien que les figures de la section 3.3.1 illustrent une variété de dimension 2, l'idée qu'elles véhiculent se traduit directement à la situation en dimension 3.

3.3.1 Démonstration du théorème de Moise

Démonstration. Soit M variété. Il existe des voisinages ouverts $N_p \cong D^m$ de p pour tout $p \in M$, où D^m est boule ouverte de dimension $m = \dim M$. Considérons des voisinages ouverts de p $N'_p \cong D^m$ tels que $\overline{N'_p} \subset N_p$; ils forment un recouvrement de M . Puisque M est paracompacte, on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable $\{N'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Nous avons donc des paires $\overline{D^m} \cong \overline{N'_n} \subset N_n \cong D^m$.

Puisque $N_1 \cong D^m$, il existe un complexe simplicial K_1 tel que $|K_1| \subset N_1$. On subdivise K_1 afin d'obtenir un sous-complexe K'_1 tel que $\overline{N'_1} \subset |K'_1|$ et $|K'_1| \cap \partial|K_1| = \emptyset$ (Fig. 3.2).

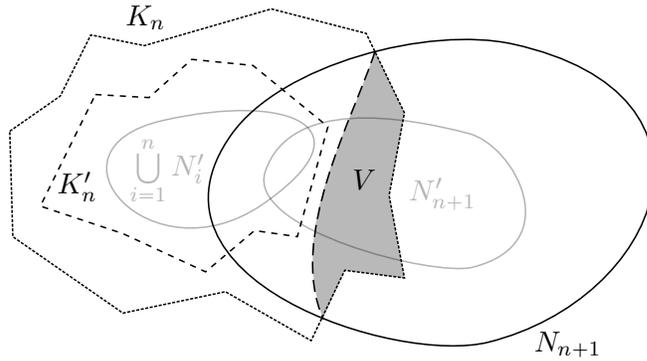
Par récurrence, montrons que pour tout $n > 1$ il existe un complexe fini K_n tel que

FIGURE 3.2 – Les complexes K_1 et K'_1 .

$\bigcup_{i=1}^n N'_i \subset |K'_n|$, où K'_n est sous-complexe de K_n tel que $|K'_n| \cap \partial|K_n| = \emptyset$, et tel que K'_{n-1} est sous-complexe de K'_n .

L'idée est d'étendre le complexe K_n sur N_{n+1} . Pour ce faire, il est nécessaire d'avoir une structure simpliciale sur $N_{n+1} \cap \partial|K_n|$. Or, le plongement $f : |K_n| \hookrightarrow M$ n'est pas nécessairement PL sur $N_{n+1} \cap \partial|K_n| \subset \mathbb{R}^m$. On cherche donc à définir une certaine transition entre f et une fonction g qui est PL sur $N_{n+1} \cap \partial|K_n|$.

Considérons un voisinage ouvert V de $N_{n+1} \cap \partial|K_n|$ dans $|K_n|$, et inclus dans $|K_n| \setminus |K'_n|$ (Fig. 3.3). Par la proposition 3.3.2 démontrée plus bas, lorsque $\dim M = 3$ (ou 2), il existe un homéomorphisme $h : |K_V| \cong V \subset N_{n+1}$ où K_V est un complexe simplicial.

FIGURE 3.3 – V est voisinage de $N_{n+1} \cap \partial|K_n|$ et est ouvert dans $|K_n|$.

Le coeur de la démonstration réside dans le fait que h peut-être approximée (Prop. 3.3.3) par un homéomorphisme PL $g : |K_V| \rightarrow V \subset N_{n+1}$ qui est compatible avec $f|_{|K_n| \setminus |K_V|}$,

c'est-à-dire que la fonction

$$\tilde{f} = \begin{cases} g, & \text{sur } |K_V| \\ f, & \text{sur } |K_n| \setminus |K_V| \end{cases}$$

est continue sur $|K_n|$.

Elle confère à $N_{n+1} \cap \partial|K_n|$ la structure simpliciale nécessaire afin qu'un complexe fini L soit tel que (Fig. 3.4)

1. $L \cup K_n$ est complexe simplicial ;
2. $|L| \cap |K_n| = \partial|L| \cap \partial|K_n| \subset N_{n+1}$;
3. $\overline{N'_{n+1}} \subset |L| \cup |K_n|$.

De plus, il existe un sous-complexe L' d'une subdivision de L tel que (Fig. 3.4)

1. $|L'| \cap |K_n| = \partial|L'| \cap \partial|K_n|$;
2. $\overline{N'_{n+1}} \subset |L'| \cup |K_n|$;
3. $|L'| \cap \partial|L| = \emptyset$.

Par la même construction que celle à la fin de la démonstration de la proposition 3.3.2 présentée plus loin, en subdivisant les simplexes de K_n intersectant L' , on aura que $L' \cup K_n$ forme un complexe simplicial.

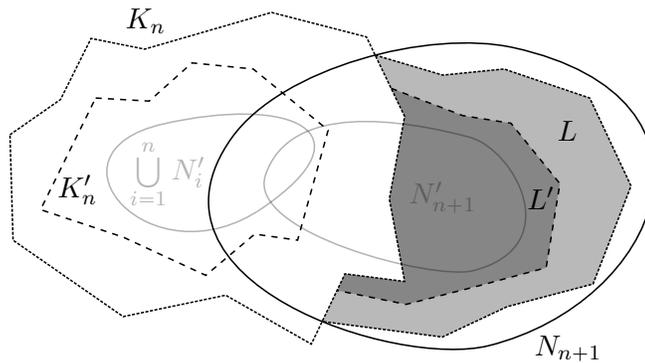


FIGURE 3.4 – Les complexes L et L' .

Du côté de $|K_n|$, on considère un sous-complexe K''_n d'une subdivision de K_n tel que (Fig. 3.5).

1. $\overline{N'_{n+1}} \cap |K_n| \subset K''_n$;
2. $|K''_n| \cap \partial|K_n| \subset \partial|L'|$.

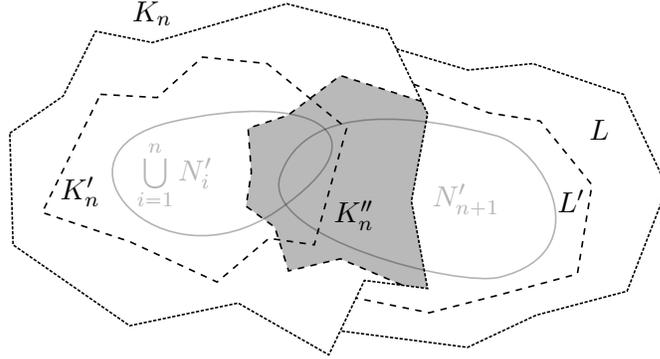


FIGURE 3.5 – Le sous-complexe K''_n .

Après subdivision appropriée de L' et K_n , on définit les complexes simpliciaux finis (Figures 3.5 et 3.6)

$$K_{n+1} = L \cup K_n,$$

$$K'_{n+1} = L' \cup K'_n \cup K''_n.$$

Puisque $|K_V| \cap |K'_n| = \emptyset$, \tilde{f} coïncide avec f sur $\bigcup_{i=1}^n N_i$, ce dernier étant inclus dans $|K'_n|$.

Il s'ensuit que K_{n+1} et K'_{n+1} sont bien tels que $\bigcup_{i=1}^{n+1} N'_i \subset |K'_{n+1}|$ avec $|K'_{n+1}| \cap \partial|K_{n+1}| = \emptyset$, et K'_n est sous-complexe de K'_{n+1} (Fig. 3.6).

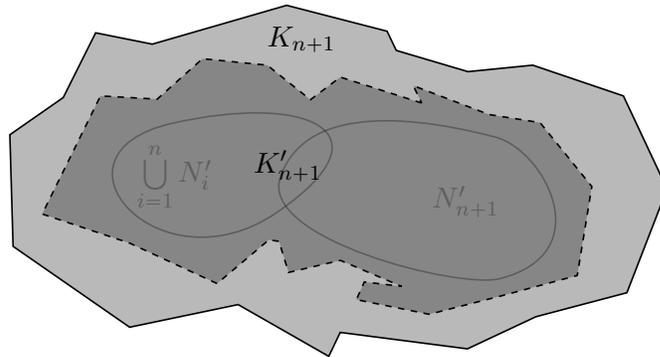


FIGURE 3.6 – Les complexes K_{n+1} et K'_{n+1} .

L'union $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K'_n$ est un complexe simplicial tel que $|K| \subset M$ et $M \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N'_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} |K'_n| = |K|$. On en conclut que $M = |K|$, ce qu'il fallait démontrer pour obtenir une triangulation de M .

Nous démontrons dans les deux sections suivantes les propositions 3.3.2 et 3.3.3 utilisées plus haut, ce qui complétera la démonstration du théorème.

3.3.2 Complexe simplicial homéomorphe à un ouvert

Proposition 3.3.2. *Soit K complexe simplicial fini et U ouvert de $|K|$. Il existe K_U tel que $|K_U| = U$ et dont chaque simplexe est simplexe d'une subdivision de K .*

Démonstration. Soit une suite de complexes $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ où $K_1 = K$ et où les K_i sont tels que

1. K_{i+1} est subdivision de K_i ;
2. $\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sup_{\sigma \in K_i} \{\text{diam}(\sigma) \mid \sigma \text{ simplexe} \in K_i\} \right) = 0$.

Une telle suite existe puisqu'on peut prendre K_{i+1} comme étant la i -ème subdivision barycentrique de K .

Nous voulons maintenant montrer l'existence pour tout $r \in \mathbb{N}$ d'une famille de complexes simpliciaux $\{L_i\}_{i=1}^r$ et d'un sous-ensemble d'indices $\{n_i\}_{i=1}^r \subset \mathbb{N}$ tels que, pour $\mathcal{L}_r = \bigcup_{i=1}^r |L_i|$ on ait

- (i) L_i est sous-complexe de K_{n_i} ;
- (ii) $n_i < n_{i+1}$;
- (iii) $\mathcal{L}_r \subset U, \quad \forall r \in \mathbb{N}$;
- (iv) $\mathcal{L}_{r-1} \subsetneq \mathcal{L}_r$;
- (v) Pour tout $\sigma \in K_{n_r}$, si $|\sigma| \subset U$, alors $\sigma \in \mathcal{L}_r$.

Procédons par récurrence sur r . Pour $r = 1$, prenons $L_1 = \{\sigma \in K_1 \mid |\sigma| \subset U\}$, avec $n_1 = 1$. Les conditions (i)-(v) sont vérifiées par construction.

Supposons par hypothèse de récurrence qu'il existe une famille $\{L_i\}_{i=1}^r$ vérifiant (i)-(v). Montrons qu'on peut trouver L_{r+1} tel que $\{L_i\}_{i=1}^{r+1}$ respecte aussi (i)-(v).

K étant complexe fini, on a $|K| \setminus U$ compact. De même, \mathcal{L}_r est une union finie de sous-complexes de subdivisions finies de K , alors elle est compacte. Ainsi, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\text{dist}(x, y) > \epsilon$ pour tout $x \in |K| \setminus U, y \in \mathcal{L}_r$. En effet, supposons le contraire : on peut donc trouver des suites $\{x_n\} \subset |K| \setminus U$ et $\{y_n\} \in \mathcal{L}_r$ telles que $\text{dist}(x_n, y_n)$ converge vers 0. Par compacité, la suite $\{(x_n, y_n)\}$ converge vers un $(x, y) \in |K| \times |K|$. La fonction distance $|K| \times |K| \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ étant continue, on a

$$\text{dist}(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(x_n, y_n) = 0$$

d'où $x = y$. Ce dernier est donc point d'accumulation de $|K| \setminus U$. Or, $|K| \setminus U$ est fermé car U est ouvert par hypothèse, d'où $y \in |K| \setminus U$ puisqu'un fermé contient tous ses points d'accumulation. On obtient une contradiction de (iii) disant que $\mathcal{L}_r \subset U$ et donc que y doit être dans U .

Parmi les $K_i, i \in \mathbb{N}$, il existe un $K_{n_{r+1}}$ tel que $\sup_{\sigma \in K_{n_{r+1}}} \text{diam}(\sigma) < \epsilon$, et $n_{r+1} > n_r$.

Posons $L_{r+1} = \{\sigma \in K_{n_{r+1}} \mid \text{int } |\sigma| \subset U \setminus \mathcal{L}_r\}$, c'est-à-dire l'ensemble des simplexes de $K_{n_{r+1}}$ dans $U \setminus \mathcal{L}_r$, ainsi que ceux partageant une face avec le sous-complexe de $K_{n_{r+1}}$ correspondant à l'espace \mathcal{L}_r .

Montrons que la famille $\{L_i\}_{i=1}^{r+1}$ vérifie (i)-(v). Par hypothèse de récurrence, les conditions sont vérifiées pour les $i = 1, \dots, r$. Il suffit de les vérifier pour $r + 1$.

- (i) L_{r+1} est sous-complexe de K_{n_r} par construction ;
- (ii) $n_r < n_{r+1}$ par notre choix de K_{n_r} ;
- (iii) $L_{r+1} \subset U$ par construction ; alors $\mathcal{L}_{r+1} = \mathcal{L}_r \cup L_{r+1} \subset U$, car $\mathcal{L}_r \subset U$ par hypothèse de récurrence ;
- (iv) Il suffit de montrer que $L_{r+1} \neq \emptyset$, puisque par construction, si $\sigma \in L_{r+1}$, alors $|\sigma| \not\subset \mathcal{L}_r$, et on aura $\mathcal{L}_{r+1} = L_{r+1} \cup \mathcal{L}_r \subsetneq \mathcal{L}_r$. Considérons un $\sigma \in K_{n_{r+1}}$, partageant une face avec le sous-complexe de $K_{n_{r+1}}$ correspondant à \mathcal{L}_r . Par notre choix de

$K_{n_{r+1}}$, on a $\text{diam}(\sigma) < \epsilon$. Le simplexe σ est contenu dans U puisque la distance entre $|K| \setminus U$ et \mathcal{L}_r est ϵ : il s'ensuit que σ est élément de L_{r+1} .

Par conséquent, on peut définir \mathcal{L}_r pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Par construction, on a $U = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} |L_r| = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{L}_r$. Sans perte de généralité, supposons que $n_r = r$. Il se peut que $L_r \cup L_{r+1}$ ne soit pas complexe simplicial, puisqu'un sommet v de $K_{r+1} \cap L_{r+1}$ peut ne pas coïncider avec un sommet de $K_r \cap L_r$. Dans ce cas, posons σ le simplexe de K_r tel que $v \in |\sigma|$. On subdivise d'abord σ afin qu'il coïncide avec le sous-complexe $\sigma \cap K_{r+1}$ de K_{r+1} . Ensuite, il suffit de subdiviser tout simplexe τ de K_r ayant σ comme face de sorte qu'il y ait une arête entre chaque paire de l'ensemble discret formé du barycentre de τ , des sommets de τ et de v . En procédant ainsi pour tout sommet v , et pour tout r , on obtient le complexe désiré $K_U = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} L_r$. \square

Dans la démonstration du théorème, en prenant $U = V \subset N_{n+1}$ et K le complexe fini de K_n , la proposition 3.3.2 nous procure le complexe simplicial K_V . Puisque $N_{n+1} \cong D^3 \cong \mathbb{R}^3$, on pourra appliquer la proposition suivante.

3.3.3 Approximation linéaire par morceaux

Proposition 3.3.3. *Soit K complexe simplicial pour lequel il existe un homéomorphisme $h : |K| \cong U \subset \mathbb{R}^3$. Soit $\phi : |K| \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Il existe un plongement linéaire par morceaux $f : |K| \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ tel que*

$$\text{dist}(h(x), f(x)) < \phi(x)$$

pour tout $x \in |K|$. On dit alors que f est une ϕ -approximation de h .

Pour démontrer la proposition, nous voulons trouver une ϕ -approximation de h pour un voisinage du 1-squelette de K qu'on étendra ensuite à K en entier.

Pour ce faire, démontrons d'abord la proposition dans le cas où $\phi \equiv \epsilon > 0$, une constante, et $U \cong \overline{D^3}$. Trouvons une ϵ -approximation pour un voisinage du 1-squelette de K qu'on

étendra ensuite à K en entier.

Lemme 3.3.4. *Soit K complexe simplicial fini pour lequel il existe un homéomorphisme $h : |K| \cong \overline{D^3} \subset \mathbb{R}^3$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $f : |K| \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ une ϵ -approximation de h .*

Démonstration. L'hypothèse $|K| \cong \overline{D^3}$ nous permet de considérer K comme sous-complexe d'un complexe simplicial homéomorphe à \mathbb{R}^3 et d'étendre h à un voisinage simplicial $K' > K$.

On choisit un voisinage simplicial $N < K'$ de K^1 tel que $|K^1|$ soit une rétraction de $|N|$ et $|K^1| \subset \text{int } |N|$. Pour chaque arête e de K , on considère un sous-complexe $D_e < N$ homéomorphe à $\overline{D^2}$ de sorte que $e \cap D_e$ est un point et $\partial D_e \subset \partial N$. Ces disques partitionnent N en des complexes C_v homéomorphes à $\overline{D^3}$ de sorte que chaque C_v contienne exactement un sommet $v \in K$ (Fig. 3.9).

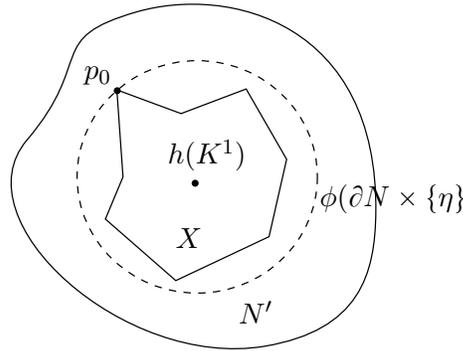
Montrons qu'il existe une ϵ -approximation $f|_N$ de $h|_N$.

Supposons que K soit suffisamment subdivisé pour qu'on ait $\text{diam } h(C_v) < \epsilon/2$. On remplace dans $h(N)$ les disques $h(D_e)$ par des disques simpliciaux E_e de sorte que E_e soit dans un voisinage de $h(D_e)$. Ceci donne lieu à une nouvelle collection de C'_v contenant chacun l'image $h(v)$ d'un sommet $v \in K$, avec $C'_v \cap C'_w \subset E_e$ si $e = vw$. Posons $N' = \bigcup_{v \in K} C'_v$.

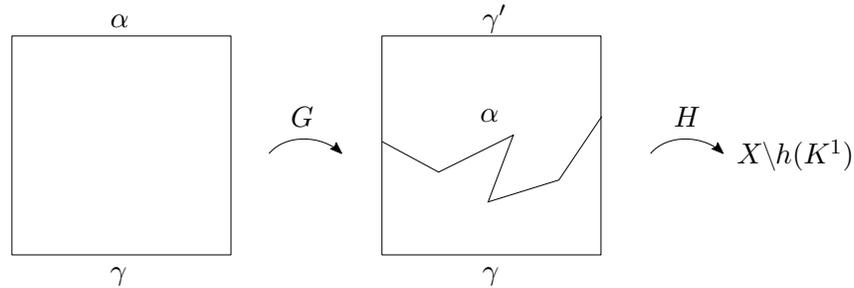
Il existe un complexe simplicial $X \subset \text{int } N'$ qui est voisinage de $h(K^1)$. On peut supposer que X ne contient pas de disque simplicial $\overline{D^2}$ dont le bord est non contractible dans ∂X et tel que $\overline{D^2} \cap h(K^1) = \emptyset$ et $\overline{D^2} \cap \partial X = \partial \overline{D^2}$. Si tel était le cas, il suffirait de considérer la composante contenant $h(K^1)$ de $X \setminus \overline{D^2}$.

Par le théorème du lacet (Théorème 3.2.1), l'homomorphisme $i_* : \pi_1(\partial X) \rightarrow \pi_1(N' \setminus h(K^1))$ induit par l'inclusion est injectif.

Montrons la surjectivité de i_* . On considère un homéomorphisme $\phi : \partial N \times (0, 1) \hookrightarrow \text{int } N'$ de sorte que $\phi(\partial N \times \{1\}) \subset N' \setminus X$ et $\phi(\partial N \times \{0\}) \subset X$. Il existe un η maximal tel que $\phi(\partial N \times \{\eta\}) \cap X \neq \emptyset$. Soit p_0 un point de cette intersection (Fig. 3.7).

FIGURE 3.7 – Coupe transversale de N' .

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow X \setminus h(K^1)$ un lacet basé en p_0 . Chaque point $\gamma(t)$ est égal à un point $\phi(n(t), s(t)) \in \phi(\partial N \times (0, \eta])$. En projetant $\gamma(t)$ sur $\phi(n(t), \eta)$, on obtient une homotopie entre γ et $\gamma' : [0, 1] \rightarrow \phi(n(t), \eta)$. Posons H cette homotopie. L'image de H est une surface intersectant ∂X en l'image d'un lacet α basé en p_0 par construction. Puisque $[0, 1]^2$ est simplement connexe, il existe une homotopie G entre le chemin dans $[0, 1]^2$ dont l'image est $H^{-1}(\gamma)$ et le chemin dans $[0, 1]^2$ dont l'image est $H^{-1}(\alpha)$. La composition $H \circ G$ est une homotopie entre γ et α , un lacet dans ∂X (Fig. 3.8).

FIGURE 3.8 – Composition des homotopies G et H .

De façon symétrique, on trouve que tout lacet $\gamma : [0, 1] \rightarrow N' \setminus X$ basé en p_0 est homotope à un lacet dans ∂X . On prend p_0 comme point de base pour les groupes fondamentaux $\pi_1(\partial X)$ et $\pi_1(N' \setminus h(K^1))$. Un élément de $[\gamma] \in \pi_1(N' \setminus h(K^1))$ est représenté par un lacet γ homotope à la concaténation d'un lacet γ_1 dans $X \setminus h(K^1)$ et d'un lacet γ_2 dans $N' \setminus X$ basés en p_0 . Nous venons de démontrer que ces derniers sont respectivement homotopes à des chemins α_1 et α_2 dans ∂X . Alors $i_*([\alpha_1 * \alpha_2]) = [\alpha_1 * \alpha_2] = [\gamma_1 * \gamma_2] = [\gamma]$, ce qui

montre la surjectivité de i_* .

Par conséquent, $\pi_1(\partial X) \cong \pi_1(N' \setminus h(K^1)) \cong \pi_1(\partial N)$, ce qui implique que $H_1(\partial X) \cong H_1(\partial N)$. Par la classification des surfaces compactes, ∂X et ∂N étant orientées par construction et compactes car K fini, on a $\partial X \cong \partial N$.

Ainsi, en posant $X_v = X \cap C'_v$, on obtient que $\partial X_v = \partial X \cap C'_v$ est homéomorphe à $\partial C_v \cong S^2$. Posons $E'_e \subset E_e$ le disque simplicial intersectant e dans X_v . On définit un homéomorphisme PL f entre C_v et X_v de la façon suivante.

D'abord, puisque $E_e \cong D_e \cong \overline{D^2}$, on peut trianguler D_e par un complexe isomorphe à celui triangulant D_e , ce qui permet de définir f sur D_e avec $f(D_e) = E_e$. Ensuite,

$$\partial X_v \setminus \bigcup_{v \in e} \text{int } E'_e \cong \partial C_v \setminus \bigcup_{v \in e} \text{int } D_e \cong \overline{D^2} \setminus \bigsqcup_{c \in e} D^2,$$

ce qui permet de trianguler $\partial C_v \setminus \bigcup_{v \in e} \text{int } D_e \cong \overline{D^2}$ par un complexe isomorphe à celui triangulant $\partial X_v \setminus \bigcup_{v \in e} \text{int } E'_e$ et ainsi d'étendre f à ∂C_v avec $f(\partial C_v) = \partial X_v$. Finalement, $X_v \cong C_v \cong \overline{D^3}$, ce qui par le même raisonnement permet d'étendre f à tout C_v . En faisant de même pour tout sommet $v \in K$, nous avons défini l'homéomorphisme PL f sur tout N , que nous notons $f|_N$.

Soit $x \in C_v$. Puisque $f|_N(x) \in X_v \subset h(C_v)$, on a $\text{dist}(h|_N(x), f|_N(x)) < \epsilon/2 < \epsilon$, ce qui fait de $f|_N$ l' ϵ -approximation voulue de $h|_N$.

Remarque. La stratégie que nous venons d'employer pour définir un homéomorphisme PL consiste à le définir d'abord pour des surfaces qu'on sait trianguler grâce au théorème 2.2.1, puis à l'étendre sur une boule de dimension 3 ayant comme bord l'union de ces surfaces. De même, un homéomorphisme PL défini sur un espace homéomorphe à S^1 pourra être étendu à un disque ayant cet espace comme bord. Appelons cette technique l'*extension par bords*. Elle sera utilisée de nouveau dans ce qui suit.

Soit un 2-simplexe $\sigma = v_0 v_1 v_2$. Le voisinage du 1-squelette de σ défini par $N_\sigma = C_{v_1} \cup C_{v_2} \cup C_{v_3}$ est un tore solide (Fig. 3.9).

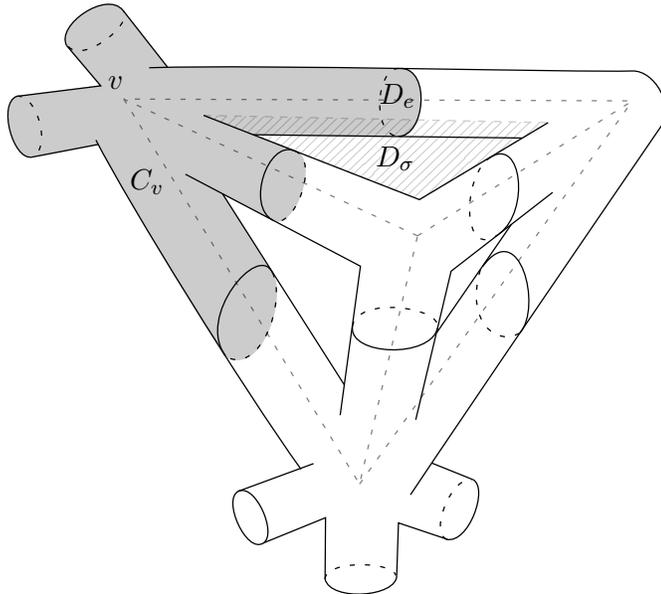


FIGURE 3.9 – Un exemple de N_σ (en ombragé), où σ est le 2-simplexe du haut. Des demi-arêtes ayant un sommet en commun avec le 3-simplexe sont illustrées.

Posons $D_\sigma = \sigma \setminus N$ (Fig. 3.9). Nous cherchons à étendre $f|_N$ à D_σ pour tout 2-simplexe $\sigma \in K$. Pour ce faire, on considère des voisinages topologiques $V_\sigma \cong D^3$ pour chaque $h(\sigma)$, de sorte que ∂V_σ intersecte $f(N)$ en deux composantes homéomorphes à S^1 , représentant le même générateur de $H_1(\partial f(N_\sigma))$ (Fig. 3.10). On choisit les V_σ assez petits afin qu'ils ne s'intersectent pas entre eux ailleurs que dans $\text{int}(f(N))$. Posons D'_σ une des composantes de $\partial V_\sigma \setminus f(N)$, homéomorphe à D^2 et dont le bord représente un générateur de $H_1(\partial f(N_\sigma))$.

Soit $v \in \sigma$. On modifie légèrement $f|_{C_v}$ pour avoir $f(C_v) \cap D'_\sigma$ comme image de $C_v \cap D_\sigma$ et de façon à conserver la structure simpliciale de C_v (Fig. 3.11). En répétant cette modification pour tout $v \in \sigma$ et tout $\sigma \in K$, et en ayant choisi des V_σ assez petits, ce nouveau $f|_N$ est encore une ϵ -approximation de $h|_N$.

Maintenant, ∂D_σ est homéomorphe PL à $\partial D'_\sigma \cong S^1$ par la construction précédente, ce qui permet de poursuivre l'extension par bords de f à $D_\sigma \cong \overline{D^2}$, puis ensuite à $K \setminus \text{int}(N \cup \bigsqcup_{\sigma \in K} D_\sigma) \cong \bigsqcup_{\sigma \in K} \overline{D^3}$.

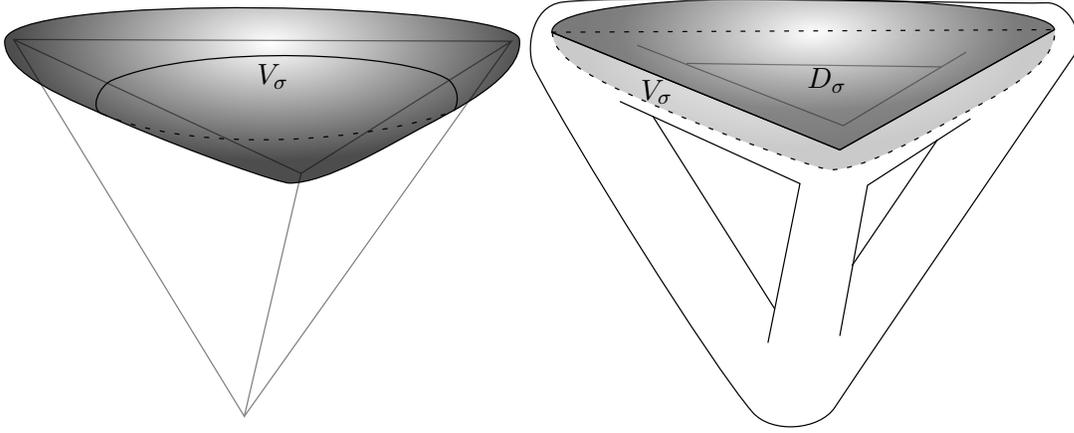


FIGURE 3.10 – Un voisinage V_σ et son intersection avec $f(N)$.

En ayant fait un choix de V_σ assez petit, on obtient en f l' ϵ -approximation de h voulue, ce qui conclut la démonstration du Lemme 3.3.4. \square

Démonstration. (Prop. 3.3.3) On répète les premières étapes de la démonstration du lemme jusqu'à la partition de N en des complexes $C_v \cong D^3$, où N est un voisinage assez petit d'une subdivision de K et de \mathbb{R}^3 de sorte que

$$h(C_v) \subset \text{int } B_v$$

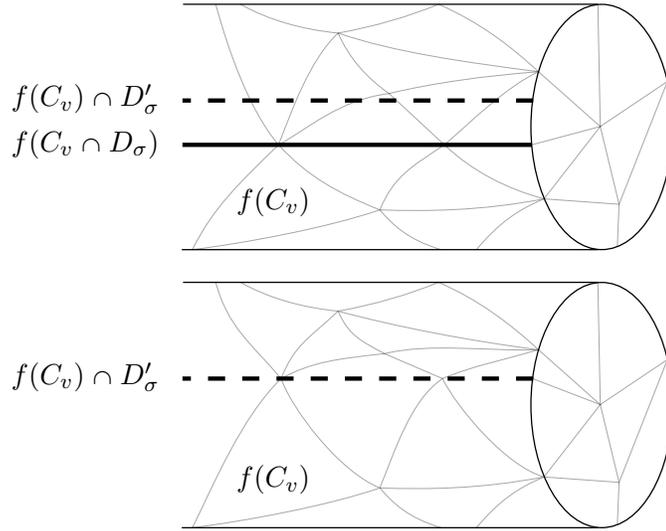
pour tout $v \in K^1$, où B_v est la boule centrée en $h(v)$ de rayon $\frac{\inf \phi|_{C_v}}{2}$.

Pour chaque arête $e = vw$, on modifie C_w, C_v , en des complexes $C'_w \supset C_w, C'_v \supset C_v$ tels que $C'_w \cap C'_v \cong D^3$ et $\partial(C'_w \cap C'_v) \cap \partial C'_v \subset D_e$ (Fig. 3.12).

$|C'_v|$ et $|C'_w|$ étant homéomorphes à $\overline{D^3}$ et C'_v, C'_w étant des complexes finis, on applique le lemme précédent pour obtenir des ϵ_v et ϵ_w -approximations $f_v : C'_v \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $f_w : C'_w \rightarrow \mathbb{R}^3$ de $h|_{C_v}$ et $h|_{C_w}$ respectivement. On choisit $\epsilon_v, \epsilon_w > 0$ assez petits afin que

1. $f_v(C'_v) \subset B_v$ et $f_w(C'_w) \subset B_w$;
2. $f_w(C'_w) \cap f_v(C'_v) \cong \overline{D^3}$;
3. $\partial(f_w(C'_w) \cap f_v(C'_v)) \cap \partial f_v(C'_v) \subset f_v(D_e)$.

Posons $C''_w = \overline{f_w(C'_w)} \setminus \bigcup_{vw \in K^1} f_v(C'_v)$ et $D'_e = \partial f_v(C'_v) \cap f_w(C'_w)$ (Fig. 3.13).

FIGURE 3.11 – Modification de $f|_{C_v}$

On définit un plongement PL $f|_N : N \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ en posant $f|_N(D_e) = D'_e$ en considérant des subdivisions de $D_e \cong \overline{D^2}$ et $D'_e \cong \overline{D^2}$ faisant de D_e et D'_e des complexes isomorphes. On étend ensuite f à C_v et C_w en posant $f|_N(C_v) = C''_v$ et $f|_N(C_w) = C''_w$ de façon compatible avec la structure combinatoire des $f|_N(D_e) = D'_e$.

Soit $x \in C_v$. On a $f|_N(x) \in C''_v \subset f_v(C'_v) \subset B_v$. Aussi, $h(x) \in B_v$ si bien que $\text{dist}(h|_N(x), f|_N(x)) < \inf \phi|_{C_v} < \phi(x)$, faisant de $f|_N$ une ϕ -approximation de $h|_N$.

Finalement, on considère des voisinages V_σ de chaque 2-simplexe $\sigma \in K$ comme dans le lemme. Avec des V_σ assez près de σ , par extension par bords, on aura $f : N \cup K \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que $\text{dist}(h(x), f(x)) < \inf \phi|_\sigma < \phi(x)$.

En prenant la restriction à K de f , nous obtenons la ϕ -approximation voulue de h . \square

Pour compléter la démonstration du théorème principal, on prend $K = K_V$. Rappelons que h est l'homéomorphisme $|K_V| \cong V$, qu'on peut considérer comme étant la restriction de f à $|K_V|$. Prenons $\phi : |K_V| \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ tel que pour tout $x \in |K_V|$,

$$\phi(x) < \text{dist}(f(x), f(|K_n| \setminus |K_V|)).$$

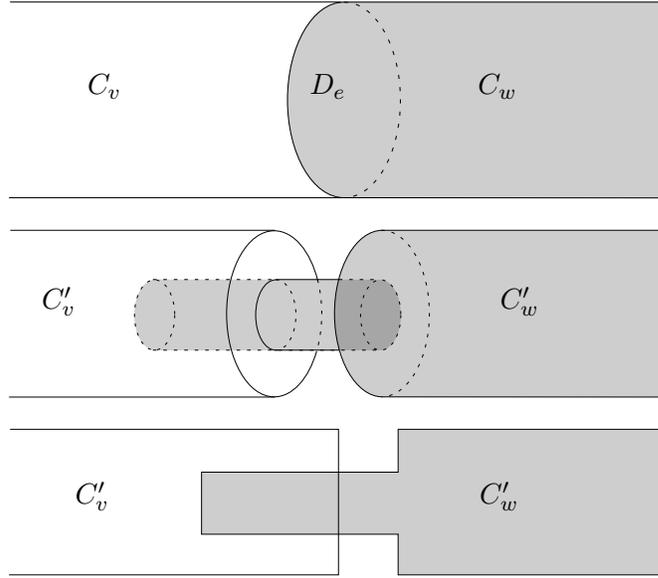


FIGURE 3.12 – C_v, C_w autour d'un D_e et C'_v, C'_w vus de biais et de côté.

La proposition 3.3.3 donne l'existence de g , une ϕ -approximation de $f|_{|K_v|} = h$.

Montrons la continuité de \tilde{f} à la frontière $\overline{|K_V|} \cap (|K_n| \setminus |K_V|) \subset |K_n|$.

Soit $x \in \overline{|K_V|} \cap (|K_n| \setminus |K_V|)$ et $y \in |K_V|$. Puisque $\phi(y)$ tend vers 0 lorsque $\text{dist}(f(x), f(|K_n| \setminus |K_V|))$ tend vers 0, il existe $\delta > 0$ tel que pour $\text{dist}(x, y) < \delta$, on ait $\phi(y) < \epsilon/2$. Par continuité de f sur $|K|$, il existe aussi un $\delta > 0$ tel que pour $\text{dist}(x, y) < \delta$, on ait $\text{dist}(f(x), f(y)) < \epsilon/2$. En prenant le minimum de ces δ , on a que $\text{dist}(x, y) < \delta$ implique que

$$\begin{aligned}
 \text{dist}(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) &= \text{dist}(f(x), g(y)) \\
 &\leq \text{dist}(f(x), f(y)) + \text{dist}(f(y), g(y)) \\
 &< \epsilon/2 + \phi(y) \\
 &< \epsilon.
 \end{aligned}$$

Si $y \in |K_n| \setminus |K_V|$, la continuité de f sur $|K_n|$ nous donne un $\delta > 0$ tel que $\text{dist}(x, y) < \delta$ implique que $\text{dist}(f(x), f(y)) < \epsilon$. Par conséquent, pour tout $x \in \overline{|K_V|} \cap (|K_n| \setminus |K_V|)$, il existe $\delta > 0$ tel que $\text{dist}(x, y) < \delta$ implique $\text{dist}(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) < \epsilon$.

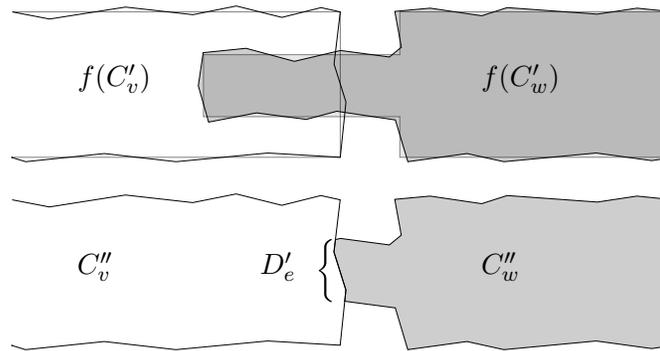


FIGURE 3.13 – $f(C_v), f(C_w)$ autour d'un D_e et C''_v, C''_w .

La continuité de \tilde{f} ailleurs sur $|K_n|$ est donnée par celle de g et f , ce qui conclut la démonstration. \square

CHAPITRE IV

TRIANGULATION EN DIMENSION 4

4.1 Signature d'une variété de dimension 4

La stratégie d'*extension par bords* d'une triangulation employée en dimension 3 repose sur le théorème du lacet qui ne tient pas en dimension 4 (Ray et Ruberman, 2017). En contrepartie, la parité de leur dimension permet d'étudier les variétés de dimension 4 orientées par la *forme d'intersection* induite par le cup-produit

$$\begin{aligned} H^2(M, \partial M; \mathbb{Z}) \times H^2(M, \partial M; \mathbb{Z}) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (a, b) &\mapsto a \smile b([M]) \end{aligned}$$

où $[M]$ est la classe fondamentale de M .

En considérant la matrice de cette forme quadratique comme à coefficients réels, posons b_2^+ et b_2^- le nombre de valeurs propres respectivement positives et négatives comptées avec multiplicité.

Définition 4.1.1. La *signature* d'une variété M de dimension 4 orientée, notée $\sigma(M)$, est la valeur entière

$$\sigma(M) = b_2^+ - b_2^-.$$

La signature possède les propriétés suivantes (Kirby, 1989, Théorème 5.3) :

1. (Additivité de Novikov) $\sigma(M \cup_Y N) = \sigma(M) + \sigma(N)$, si M et N partagent une composante de bord Y .

2. (Additivité pour la somme connexe) $\sigma(M\#N) = \sigma(M) + \sigma(N)$

3. (Orientation inverse) $\sigma(-M) = -\sigma(M)$

où N est une autre variété orientée de dimension 4 et $-M$ est M munie de l'orientation inverse.

4.2 Théorème de Rokhlin

Le théorème de Rokhlin illustre l'importance de la signature en tant qu'invariant de variétés de dimension 4.

Théorème (Rokhlin, 1952). *Une variété M de dimension 4 lisse, fermée et dont la deuxième classe de Stiefel-Whitney $w_2(M)$ est triviale a une signature $\sigma(M)$ divisible par 16.*

Remarque. La signature d'une variété de dimension 4 et les résultats de Rokhlin sont aussi utiles en dimension 3, notamment lors de l'étude de cobordismes entre variétés. C'est dans ce contexte que ces notions feront leur apparition dans la Partie II de ce mémoire.

4.3 Variété de Freedman

La démonstration originale de l'existence d'une variété topologique non triangulable en dimension 4 est due à Andrew Casson (Akbulut et McCarthy, 1990, p. xvi). Elle fait usage de l'invariant de Casson, un relèvement de l'invariant de Rokhlin (Section 5.2.7).

Le contre-exemple étudié par Casson est celui de la variété $E8$ de Freedman dont la construction repose sur le résultat suivant (Freedman, 1982, Théorème 1.4').

Théorème 4.3.1 (Freedman, 1982). *Toute sphère d'homologie de dimension 3 est le bord d'une variété contractile de dimension 4.*

Proposition 4.3.2. *Il existe une variété fermée de dimension 4 M de signature $\sigma(M) = 8$.*

Démonstration. Considérons la sphère de Poincaré Σ , une sphère d'homologie de dimension 3 correspondant au quotient $SO(3)/A_5$, où A_5 est le sous-groupe alterné du groupe symétrique S_5 , isomorphe au groupe de symétries rotationnelles d'un dodécaèdre régulier. Σ est bord d'une variété orientée P de forme d'intersection $E8$ (Kirby et Scharlemann, 1979, pp. 114-115).

$$E8 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La signature de P est $\sigma(P) = 8$. Par le théorème de Freedman, Σ est aussi bord d'une variété contractile Δ . En posant

$$M = P \cup_{\Sigma} \Delta$$

et par additivité de Novikov, on a $\sigma(M) = \sigma(P) + \sigma(\Delta) = 8 + 0 = 8$. \square

4.4 Existence de variétés non triangulable en dimension 4

Le théorème de Poincaré-Perelman établi en 2003 (Perelman, 2002, 2003a, 2003b) donne une nouvelle démonstration de l'existence d'une variété topologique non triangulable en dimension 4.

Théorème 4.4.1 (Conjecture de Poincaré, Perelman, 2003). *Une variété topologique fermée de dimension 3 simplement connexe est homéomorphe à la sphère S^3 .*

Les lemmes et le corollaire qui permettent de faire appel au théorème de Poincaré-Perelman sont démontrés dans la prochaine section.

Théorème 4.4.2 (Casson, 1985). *Il existe des variétés de dimension 4 non triangulables.*

Démonstration. Soit M la variété de Freedman de la proposition 4.3.2, de signature $\sigma(M) = 8$. Sa deuxième classe de Stiefel-Whitney est triviale : puisqu'elle est orientée, $w_1(M) = 0$ et pour tout $x \in H^2(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

$$w_2 \smile x = (w_2 \smile w_1^2) \smile x = Sq^2(x) = x^2 = 2 \pmod{2} = 0.$$

Ainsi, il découle du théorème de Rokhlin que M ne possède pas de structure lisse.

Supposons que M possède une triangulation. Puisque M est une variété topologique, les liens de chaque sommet sont simplement connexes (Lemme 4.4.6). De plus, ce sont des complexes simpliciaux qui sont des variétés d'homologie de dimension 3, ce qui en fait des variétés topologiques (Corollaire et Lemme 4.4.8). Par le théorème de Poincaré-Perelman, ces liens sont tous homéomorphes à S^3 . Ceci confère à la triangulation (et à M), une structure linéaire par morceaux. Toute variété PL de dimension 4 pouvant être munie d'une structure lisse, M est donc lisse, ce qui contredit la théorème de Rokhlin. \square

Remarque. Nous avons démontré au passage qu'en dimension 4, une triangulation est équivalente à une structure PL.

4.4.1 Application du théorème de Poincaré-Perelman

Nous détaillons dans cette section les étapes nous permettant d'appliquer le théorème de Poincaré-Perelman.

Lemme 4.4.3. *Soit SX la suspension d'un espace X . Si SX est une variété topologique de dimension n , alors SX est homéomorphe à la sphère S^n et X est homotopiquement équivalent à S^{n-1} .*

Démonstration. Soit p le point auquel $X \times \{1\}$ est identifié dans la suspension

$$SX = X \times [-1, 1] / \sim$$

où $(x, t) \sim (y, s)$ si et seulement si $t = s \in \{-1, 1\}$. Il existe un voisinage U de p homéomorphe à \mathbb{R}^n dont le bord $\partial U \cong S^{n-1}$ est à bicollier dans $h(U)$. Soit $t_0 \in (-1, 1]$ tel que $X \times [t_0, 1]/X \times \{1\} \subset U$. L'homéomorphisme h fixant $X \times \{t_0\}$ et envoyant $X \times [t_0, 1]/X \times \{1\}$ sur $X \times [-1, t_0]/X \times \{-1\}$ donne un ouvert $h(U) \cong \mathbb{R}^n$. Les ouverts $h(U)$ et U recouvrent SX . Par le théorème de Schoenflies généralisé (Théorème 3.1.1), $h(U) \setminus U$ est homéomorphe à une n -boule fermée. Ainsi, SX est l'identification des deux n -boules fermées $h(U) \setminus U$ et \bar{U} en leur bord commun ∂U . On en conclut que SX est homéomorphe à la sphère S^n .

De plus, X est rétraction de $SX \setminus \{p, q\}$, où q est le point auquel $X \times \{-1\}$ est identifié dans SX . Par conséquent, on obtient les équivalences homotopiques

$$X \simeq SX \setminus \{p, q\} \cong S^n \setminus \{2 \text{ points}\} \simeq S^{n-1}. \quad \square$$

Lemme 4.4.4. *Soit X un espace topologique. Il existe un homéomorphisme*

$$CX \times [-1, 1]^k \cong C(S^k X),$$

où CX est le cône de X et $S^k X$ est la suspension k fois de X .

Démonstration. La suspension SX peut s'écrire

$$(X \times [-1, -1/2]/X \times \{-1\}) \cup (X \times [-1/2, 1/2]) \cup (X \times [1/2, 1]/X \times \{1\}),$$

homéomorphe à $CX \cup (X \times [-1, 1]) \cup CX$. Son cône est donné par

$$\left(CX \cup (X \times [-1, 1]) \cup CX \right) \times [-1, 1] / \left(CX \cup (X \times [-1, 1]) \cup CX \right) \times \{1\},$$

qu'on peut décrire comme l'union

$$\bigcup_{t \in [0, 1]} CX \times \{t\} \cup X \times [-t, t] \times \{t\} \cup CX \times \{t\}$$

ce qui correspond précisément à l'espace $CX \times [-1, 1]$.

En remplaçant X par $S^{k-1}X$, on obtient $C(S^{k-1}X) \times [-1, 1] \cong C(S^k X)$.

Montrons le résultat par récurrence sur k . Le cas $k = 0$ est trivial et nous avons démontré le cas $k = 1$ ci-haut. Supposons que $CX \times [-1, 1]^{k-1} \cong C(S^{k-1}X)$. Alors

$$C(S^k X) = C(S^{k-1}X) \times [-1, 1] = (CX \times [-1, 1]^{k-1}) \times [-1, 1] = CX \times [-1, 1]^k. \quad \square$$

Définition 4.4.5. Un espace topologique M est une *variété d'homologie combinatoire* s'il existe un complexe simplicial K de dimension n tel que $M \cong |K|$ et tel que pour tout simplexe $\sigma \in K$, $H_*(Lk(\sigma)) = H_*(S^{n-\dim(\sigma)-1})$.

Remarque. On utilise l'adjectif *combinatoire* pour distinguer la définition 4.4.5 de celle d'une *variété d'homologie* de dimension n . Cette dernière est un espace M dont l'homologie locale $H_k(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$ en tout point $x \in M$ est égale à \mathbb{Z} pour $k = n$ et 0 sinon. Toute variété d'homologie combinatoire est une variété d'homologie : en effet, en supposant sans perte de généralité que x est un sommet, par excision de $St(x) \setminus \{x\}$, on a

$$H_k(St(x), St(x) \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_{k-1}(St(x) \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_{k-1}(Lk(x); \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z}).$$

Lemme 4.4.6. Soit K une triangulation d'une variété topologique $M \cong |K|$ de dimension n . Les liens $Lk(\sigma)$ pour tout k -simplexe σ de K , $0 \leq k \leq n$, ont l'homologie d'une sphère S^{n-k-1} . En particulier, M est une variété d'homologie combinatoire.

Démonstration. Par définition du joint topologique, écrivons

$$Lk(\sigma) * \sigma = (Lk(\sigma) \times \sigma \times [0, 1]) / (Lk(\sigma) \times \{1\}, \sigma \times \{0\}).$$

L'ensemble des simplexes de $\overline{St}(\sigma)$ ne contenant pas σ est réalisé géométriquement par $Lk(\sigma) * \partial\sigma$. Par la proposition 1.1.10,

$$\begin{aligned} St(\sigma) &\cong (Lk(\sigma) * \sigma) \setminus (Lk(\sigma) * \partial\sigma) \\ &\cong (Lk(\sigma) \times \text{int } \sigma \times (0, 1]) / (Lk(\sigma) \times \{1\}) \\ &\cong \left(CLk(\sigma) \setminus (Lk(\sigma) \times \{0\}) \right) \times \text{int } \sigma, \end{aligned}$$

En tant qu'ouvert de la variété M , $St(\sigma)$ est une variété. Ainsi, sa fermeture est une

variété de dimension n , avec bord ∂ , homéomorphe à

$$CLk(\sigma) \times \sigma \cong CLk(\sigma) \times [-1, 1]^k \cong C(S^k Lk(\sigma))$$

où le dernier homéomorphisme est donné par le lemme 4.4.4. La suspension $S^{k+1}Lk(\sigma) = C(S^k Lk(\sigma)) \cup_{\partial} C(S^k Lk(\sigma))$ est une variété topologique de dimension n et par le lemme 4.4.3, elle est homéomorphe à S^n . Puisque $\tilde{H}_i(SX) \cong \tilde{H}_{i-1}(X)$ pour X espace topologique quelconque, on obtient

$$\tilde{H}_{i-k}(S^{n-k-i}) = \tilde{H}_i(S^n) \cong \tilde{H}_i(S^k Lk(\sigma)) \cong \tilde{H}_{i-k}(Lk(\sigma)). \quad \square$$

En particulier, lorsque $k = 0$ et $n = 4$, la suspension $SLk(\sigma)$ est homéomorphe à S^4 et $Lk(\sigma)$ est homotopiquement équivalent à S^3 . Ainsi, $Lk(\sigma)$ est simplement connexe.

Corollaire 4.4.7. *Soit K une triangulation d'une variété topologique $M \cong |K|$ de dimension n . Les liens $Lk(\sigma)$ pour tout σ simplexe de K sont des variétés d'homologie.*

Démonstration. Soit τ un k -simplexe de $Lk(\sigma)$ et posons $l = \dim \sigma$. Par définition du lien,

$$H_*(Lk(\tau, Lk(\sigma))) = H_*(Lk(\tau * \sigma, K)) = H_*(S^{n-(k+l+1)-1}). \quad \square$$

Lemme 4.4.8. *Si $M \cong |K|$ est une variété d'homologie combinatoire de dimension 3, alors elle est une variété topologique.*

Démonstration. Soit $x \in M$ et supposons sans perte de généralité que x est un sommet de K (quitte à prendre une subdivision de K).

Soit $y \in Lk(x)$ qu'on suppose sans perte de généralité être un sommet de $Lk(x)$. Par le lemme 4.4.6

$$H_*(Lk(y, Lk(x))) = H_*(Lk(yx, K)) = H_*(S^{3-1-1}) = H_*(S^1).$$

Par définition du lien, $Lk(y, Lk(x))$ est forcément homéomorphe à S^1 , si bien que $\overline{St}(y, Lk(x)) = CLk(y, Lk(x)) = B^2$, d'où l'existence d'un voisinage de y homéomorphe

à \mathbb{R}^2 dans $Lk(x)$. Ce dernier est une variété topologique de dimension 2.

L'unique variété topologique de dimension 2 ayant l'homologie de S^2 est S^2 elle-même. Ainsi, $\overline{St}(x, K) \cong CLk(x, K) \cong CS^2 \cong B^3$. Il s'ensuit qu'on peut trouver un voisinage de x homéomorphe à \mathbb{R}^3 , contenu dans $\overline{St}(x, K) \subset M$. \square

En combinant le corollaire 4.4.7 et le lemme 4.4.8, on obtient que les liens des sommets sont des variétés topologiques. Le raisonnement du lemme 4.4.6 donne la simple connexité de ces liens. Le théorème de Poincaré-Perelman s'applique bel et bien aux liens des sommets d'une variété topologique triangulée.

4.5 De la topologie géométrique à la topologie algébrique

La triangulation des variétés en dimensions 2 et 3 découle d'une description entièrement géométrique de la topologie des variétés. En revanche, le développement de la topologie algébrique dans la deuxième moitié du XX^e siècle s'est montrée indispensable au traitement des variétés de dimensions supérieures, difficiles à visualiser géométriquement. Ainsi, il est à propos que nous concluons la première partie de ce mémoire avec un théorème récemment établi (Théorème 4.4.1), dont l'application fait appel à des idées géométriques classiques (Section 4.4.1).

Dans la seconde partie, nous verrons comment l'étude des variétés topologiques en dimensions 5 et plus nécessite des techniques plus avancées. Entre autres, les notions d'homologie, d'homotopie, d'espaces classifiants et d'obstruction sont exploitées. Par ailleurs, la géométrie différentielle se joint à la topologie algébrique pour mener à l'homologie de Floer. C'est cette dernière qui parvient à parachever l'étude de l'existence d'une triangulation pour les variétés topologiques.

DEUXIÈME PARTIE

TRIANGULATION EN DIMENSIONS 5 ET PLUS

CHAPITRE V

OBSTRUCTIONS ET LE GROUPE DE COBORDISME D'HOMOLOGIE

Ce chapitre est dédié à la réduction du problème de triangulation en dimensions 5 et plus à un problème de basse dimension. Le groupe de cobordisme d'homologie de dimension 3 que l'on définit dans la première section de ce chapitre tiendra le rôle principal dans la caractérisation de l'existence d'une triangulation.

5.1 Groupe de cobordisme d'homologie

Le *groupe de cobordisme d'homologie*, noté Θ_3^H , est composé des classes d'équivalence des sphères d'homologie de dimension 3 orientées, définies par $[Y_1] = [Y_2]$ si et seulement si

- (i) Y_1 est *cobordante* à Y_2 , c'est-à-dire qu'il existe W compacte, lisse et orientée telle que $\partial W = -Y_1 \sqcup Y_2$ où $-Y_1$ dénote Y_1 munie de l'orientation inverse ;
- (ii) $H_*(W, Y_1; \mathbb{Z}) = H_*(W, Y_2; \mathbb{Z}) = 0$.

Une telle variété W est dite *cobordisme d'homologie entre Y_1 et Y_2* .

On munit Θ_3^H de l'opération induite par la somme connexe, notée $\#$, de sorte que $[Y_1]\#[Y_2] = [Y_1\#Y_2]$. Montrons que $(\Theta_3^H, \#)$ est bien un groupe.

Nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 5.1.1. *Les énoncés suivants sont équivalents.*

- (a) $[Y_1] = [Y_2]$;

$$(b) [-Y_1 \# Y_2] = [S^3];$$

(c) Il existe W' est compacte, lisse et acyclique (i.e. $H_*(W') = H_*(\{pt\})$) telle que $-Y_1 \# Y_2 = \partial W'$.

Démonstration.

(a) \Rightarrow (c) Soit W' le cobordisme d'homologie entre Y_1 et Y_2 . On considère une anse $B^3 \times [0, 1] \subset W$ telle que $B^3 \times \{0\} \subset -Y_1, B^3 \times \{1\} \subset Y_2$. On retire $A = \text{int}(B^3) \times [0, 1]$ de W' pour obtenir une variété W dont le bord est $-Y_1 \# Y_2$. On considère un voisinage A' de A tel que $A' \cap W$ se rétracte en S^2 . Avec $H_*(A') = H_*(\{pt\}), H_*(W) = H_*(S^3)$ et $H_*(A' \cap W) = H_*(S^2)$, la suite de Mayer-Vietoris pour $W' = A' \cup W$ montre que W' est acyclique.

(c) \Rightarrow (b) On retire B^4 de W' obtenue ci-haut pour obtenir une variété W'' dont le bord est $-Y_1 \# Y_2 \sqcup S^3$. On déduit de la suite de Mayer-Vietoris que $H_3(W'') = H_0(W'') = \mathbb{Z}$ et $H_i(W'') = 0, i \neq 0, 3$. La longue suite exacte d'une paire permet de conclure que $H_i(S^3, W'') = H_i(-Y_1 \# Y_2, W) = 0$ pour tout i . W'' est un cobordisme d'homologie entre $-Y_1 \# Y_2$ et S^3 .

(b) \Rightarrow (a) La dernière implication est obtenue en renversant les constructions ci-haut. On remplit S^3 de $\partial W''$, où W'' est cobordisme entre $-Y_1 \# Y_2$ et S^3 , pour obtenir une variété acyclique W' de bord $-Y_1 \# Y_2$. On remplit le tube connectant $-Y_1$ et Y_2 avec $B^3 \times [0, 1]$ pour obtenir une variété W de bord $-Y_1 \sqcup Y_2$. La suite de Mayer-Vietoris donne la condition (ii). \square

(**# est bien définie**) Soient des sphères d'homologie Y_2, Y_2' telles que $[Y_2] = [Y_2']$. On a par commutativité et associativité de $\#$

$$\begin{aligned} [-(Y_1 \# Y_2) \# (Y_1 \# Y_2')] &= [-Y_1 \# Y_1 \# -Y_2 \# Y_2'] \\ &= [-Y_1 \# Y_1] \# [-Y_2 \# Y_2'] \\ &= [S^3] \# [S^3] \\ &= [S^3 \# S^3] \end{aligned}$$

$$= [S^3],$$

où on utilise le fait que $[-Y_1 \# Y_1] = [S^3]$, démontré plus bas. Par le lemme, ceci est équivalent à $[Y_1 \# Y_2] = [Y_1 \# Y_2']$.

(Fermeture sous #) Soient Y_1 et Y_2 des sphères d'homologie. Leur somme connexe est égale à

$$Y_1 \# Y_2 = Y_1 \setminus B^3 \sqcup_{S^2} Y_2 \setminus B^3.$$

Y_i étant des sphères d'homologie, la suite de Mayer-Vietoris donne que $Y_i \setminus B^3$ sont acycliques. Elle donne aussi l'exactitude de

$$0 \rightarrow H_i(Y_1 \# Y_2) \rightarrow H_{i-1}(S^2) \rightarrow 0$$

pour $i > 1$. Ainsi, $H_i(Y_1 \# Y_2) \cong H_{i-1}(S^2) \cong \mathbb{Z}$ pour $i = 3$ et 0 pour $i > 1, i \neq 3$. Pour $i = 1$, la suite de Mayer-Vietoris donne l'exactitude de

$$0 \rightarrow H_1(Y_1 \# Y_2) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

et permet de conclure que $H_1(Y_1 \# Y_2) = 0$. $Y_1 \# Y_2$ est bien sphère d'homologie.

(Élément neutre) S^3 est élément neutre, car $Y \# S^3 \cong Y \cong S^3 \# Y$.

(Inverse) $-Y \# Y$ est le bord de $(Y \setminus B^3) \times [0, 1]$, une variété acyclique. Par le lemme, $[-Y] \#[Y] = [-Y \# Y] = [S^3]$. La classe de $-Y$ est l'inverse de celle de Y . \square

Remarque. On considère le groupe de cobordisme d'homologie en dimension 3 seulement, car il s'avère que pour toute dimension $n \neq 3$, toute n -sphère d'homologie est corbordante à S^n . Ce résultat est dû à Kervaire (Kervaire, 1969).

5.2 Structures linéaires par morceaux

Alors que l'étude de la triangulabilité en dimensions 2,3 et 4 se base sur des notions topologiquement palpables, en dimension 5 et plus, le théorème de s -cobordisme, généralisant le théorème de h -cobordisme, nous fait voir les objets sous un angle homotopique.

Dans cette section, on fait le pont entre la définition topologique d'une structure linéaire par morceaux et sa caractérisation en termes de la théorie de l'obstruction.

5.2.1 Définitions topologiques et homotopiques

On rappelle qu'une variété topologique M possède une structure linéaire par morceaux (PL) si elle satisfait aux conditions suivantes, équivalentes entre elles :

1. M possède un atlas $\{U_\alpha \cong \mathbb{R}^n\}$ dont les fonctions de transition sont linéaires par morceaux (PL).
2. M possède une triangulation dont les liens des sommets sont homéomorphes PL à S^{n-1} .

Lorsque la dimension de M est plus grande ou égale à 5, ces conditions se traduisent en termes de fibrés et d'espaces classifiants¹ des groupes suivants :

- $PL = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\text{homéomorphismes PL } \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi(0) = 0\}$
- $TOP = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\text{homéomorphismes } \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi(0) = 0\}$

Définition 5.2.1. Soit M un variété topologique et E un espace. Une projection $E \xrightarrow{p} M$ est *localement triviale* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in M$, il existe un voisinage $V_x \cong U_x \times \mathbb{R}^k$ de $i(x)$ tel que $p|_{V_x}$ est la projection sur $U_x \subset M$.

Théorème 5.2.2 (Théorème de Kister-Mazur (Kister, 1964, Théorème 2)). *Soit M un variété topologique et E un espace. Soit une section i d'une projection $E \xrightarrow{p} M$ localement triviale. Il existe un voisinage W de $i(M)$ tel que $p|_W$ est un fibré localement trivial.*

Définition 5.2.3. Le *fibré topologique* d'une variété topologique M est le fibré obtenu par le théorème de Kister-Mazur à partir de la projection sur la première composante $M \times M \xrightarrow{p} M$ et de la section $i(M) = (x, x)$.

1. La théorie des espaces classifiants est présentée dans Mitchell, 2001 et résumée dans Dieudonné, 1989, ch.III sections 2.E,F,G.

Une fibre au-dessus de $x \in M$ est un voisinage $U_x \cong \{x\} \times U_x \subset \{x\} \times M$ homéomorphe à \mathbb{R}^n . Les fonctions de transition sont dans TOP .

Les énoncés 1. et 2. sont équivalents à

3. Le groupe de structure du fibré topologique de M peut être réduit au groupe PL d'homéomorphismes linéaires par morceaux.
4. L'application classifiante $\tau : M \rightarrow BTOP$ du fibré TOP -principal induit par le fibré topologique de M possède un relèvement $\tilde{\tau} : M \rightarrow BPL$ pour l'application induite par l'inclusion $Bi : BPL \rightarrow BTOP$.

$$\begin{array}{ccc}
 & & BPL \\
 & \nearrow \tilde{\tau} & \downarrow Bi \\
 M & \xrightarrow{\tau} & BTOP
 \end{array}$$

5.2.2 Équivalence des définitions

Montrons que les énoncés 1 à 4 ci-haut sont équivalents.

(1. \Rightarrow 2.) Les homéomorphismes $U_\alpha \cong \mathbb{R}^n$ permettent de trianguler individuellement chaque U_α . Après subdivisions appropriées, on recolle ces triangulations locales via les fonctions de transition linéaires par morceaux pour obtenir une triangulation globale K de M . Soit x sommet de K . Il est contenu dans un sous-complexe dont l'intérieur est homéomorphe à \mathbb{R}^n , alors la fermeture de son voisinage étoilé $\overline{St}(x)$ est homéomorphe à une boule B^n . Par définition du lien de x , $\overline{St}(x)$ est homéomorphe au cône du lien de x . $\overline{St}(x)$ étant une variété, le lien de x est une sphère S^{n-1} .

(2. \Rightarrow 1.) Il suffit de prendre la famille $\{U_x\}$ des voisinages étoilés $St(x)$ de chaque sommet x de la triangulation. En effet, les liens homéomorphes à S^{n-1} donnent lieu à des cônes homéomorphes à B^n , d'où $St(x) \cong \mathbb{R}^n$. Les fonctions de transition sont l'identité, donc trivialement linéaires par morceaux.

(3. \Leftrightarrow 4.) Par la propriété universelle de l'espace classifiant $ETOP \rightarrow BTOP$, $\tilde{\tau}^* EPL \times_{PL}$

TOP est isomorphe au fibré topologique de M si et seulement si $\tilde{\tau}$ fait commuter le diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{\tau}^* EPL \times_{PL} TOP & \xrightarrow{(\tilde{\tau}_*, Id)} & EPL \times_{PL} TOP & \xrightarrow{Bi_*} & ETOP \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 M & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & BPL & \xrightarrow{Bi} & BTOP \\
 & \searrow \tau & & &
 \end{array}$$

où $\tilde{\tau}^* EPL$ est le pullback de $\tilde{\tau}$.

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\tau}^* EPL & \xrightarrow{\tilde{\tau}_*} & EPL \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & BPL
 \end{array}$$

(1. \Rightarrow 3.) Les fonctions de transition PL induisent un fibré au-dessus de M dont le groupe de structure est PL et dont les fibres sont des ouverts U_x de x . Soit P_{PL} le fibré PL -principal associé. Alors $P_{PL} \times_{PL} TOP$ est le fibré TOP -principal associé au fibré topologique de M .

(3. \Rightarrow 1.) Soit $N \gg 0$ tel que M soit plongée dans \mathbb{R}^N . Il existe un voisinage ouvert $W \subset \mathbb{R}^N$ de M qui se rétracte sur M par $r : W \rightarrow M$. Posons T_{TOP} le fibré topologique de M et $r^* T_{TOP}$ son pullback par r ; ce dernier est homéomorphe à $M \times \mathbb{R}^N$ (Milnor, 1964 Théorème 5.8). La réduction du groupe de structure de T_{TOP} se transmet à $r^* T_{TOP}$. Puisque W est un ouvert de \mathbb{R}^N , il possède une structure linéaire par morceaux. Le fibré $r^* T_{TOP} \cong M \times \mathbb{R}^N$ ayant PL comme groupe de structure au-dessus de la variété PL W , il est lui-même une variété PL. Par le théorème de structure d'un produit (Théorème 5.2.4), M est aussi PL. \square

5.2.3 Théorèmes de structure d'un produit et de s -cobordisme

On a besoin de $\dim M \geq 5$ pour appliquer précédemment le théorème de structure d'un produit (Kirby et Siebenmann, 1977, Essai I, Théorème 5.1) dont la démonstration fait appel au théorème de s -cobordisme (Kervaire, 1965). Ce dernier invoque aussi le fait que toute variété fermée de dimension 5 et plus possède une structure CW (Kirby et Siebenmann, 1977, Essai III, Théorème 2.1 et Quinn, 1982, Théorème 2.3.1).

Théorème 5.2.4 (Théorème de structure d'un produit, Kirby-Siebenmann, 1977). *Soit M une variété topologique de dimension plus grande ou égale à 5. Si $M \times \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, admet une structure PL, alors M admet une structure PL.*

Théorème 5.2.5 (s -cobordisme, Barden, Mazur, Stallings, 1963). *Soit un cobordisme W entre les variétés PL Y et Y' de dimension $n \geq 5$. Si $Y \hookrightarrow W$ est une équivalence homotopique simple et $Y' \hookrightarrow W$ est une équivalence homotopique, alors W est PL-homéomorphe à $Y \times [0, 1]$.*

Définition 5.2.6. Une inclusion de complexes CW $L \hookrightarrow K$ est une *équivalence homotopique simple* s'il existe une suite imbriquée de complexes CW

$$L = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_k = K$$

telle que

1. $L_{i+1} = L_i \cup_{\varphi} e^{n_i}$ où e^{n_i} est une n_i -cellule non incluse dans L_i ;
2. Il existe une $(n_i - 1)$ -cellule $e^{n_i-1} \subset \partial e^{n_i}$ telle que $\varphi(\overline{\partial e^{n_i} \setminus e^{n_i-1}}) \subset L_i$.

En particulier, si Y est simplement connexe et $Y \hookrightarrow W$ est une équivalence homotopique, cette dernière est une équivalence homotopique simple. On retrouve alors le théorème de h -cobordisme dont la démonstration fait usage du *Whitney trick* pour annuler des anses dans la décomposition en anses

$$Y \times I \subset W_0 \subset \cdots \subset W_{n+1} = W.$$

Cet outil requiert $\dim Y \geq 5$ et est utilisé de façon analogue pour démontrer le théorème du s -cobordisme.

5.2.4 Obstruction à l'existence d'une section

La condition 4. est équivalente à l'existence d'une section $s : M \rightarrow \tau_* BPL$ pour le carré pullback suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 \tau^* BPL & \longrightarrow & BPL \\
 \uparrow \scriptstyle s & & \downarrow \scriptstyle B_i \\
 M & \xrightarrow{\tau} & BTOP
 \end{array}$$

Nous voulons caractériser l'existence d'une telle section à l'aide de la théorie de l'obstruction. De façon générale, pour un fibré $F \rightarrow E \xrightarrow{p} X$ où X est un complexe CW et $\pi_1(F) = \{1\}$, une section $s : X \rightarrow E$ peut être étendue du i -squelette X^i au $(i+1)$ -squelette X^{i+1} si et seulement si une certaine classe $w_s \in H^{i+1}(X; \pi_i(F))$ est triviale.

La classe w_s est obtenue de la façon suivante. Soit s section définie sur X^i . Pour une $(i+1)$ -cellule de X , on considère son application d'attachement $g : (D^{i+1}, S^i) \rightarrow (X^{i+1}, X^i)$. Soit r_t une rétraction le long de $g(D^{i+1})$ donnant l'homotopie $g|_{S^i} \simeq pt$. Elle définit une homotopie $g_t = r_t p s g|_{S^i}$ entre $g_0 = p s g|_{S^i} : S^i \rightarrow X$ et l'application constante $g_1 = S^i \rightarrow \{pt\} \subset X$. Par la propriété de relèvement des homotopies d'un fibré, il existe un relèvement \tilde{g}_t de g_t . Puisque $p\tilde{g}_1(S^i) = \{pt\}$, on a $\tilde{g}_1(S^i) \subset p^{-1}\{pt\} = F$. On obtient donc un élément de $\pi_i(F)$ en prenant la classe d'homotopie de \tilde{g}_1 . Définissons $w_s : H_{i+1}(X^{i+1}, X^i) \rightarrow \pi_i(F)$ comme étant l'homomorphisme associant à chaque $(i+1)$ -cellule la classe $[\tilde{g}_1]$ pour \tilde{g}_t obtenue à partir de l'application d'attachement g tel que décrit précédemment. Puisque $\delta w_s = 0$ pour δ l'homomorphisme de bord en homologie cellulaire (Hatcher, 2017, p. 100), on peut prendre sa classe en cohomologie pour obtenir un élément $w_s \in H^{i+1}(X; \pi_i(F))$. Cette élément est bien défini car un relèvement \tilde{g}_t est unique à homotopie près. Aussi, deux sections définies sur X^i qui sont homotopiquement équivalentes sur X^{i-1} induisent la même classe dans $H^{i+1}(X; \pi_i(F))$ (Hatcher, 2017, p.

101).

De plus, le même raisonnement nous donne une obstruction à l'unicité de l'extension d'une section s à homotopie près. Soient s_0 et s_1 des extensions de s de X^i à X^{i+1} . Soit la section \tilde{s} de $E \times I \xrightarrow{(p, Id)} X \times I$ définie sur $(X \times I)^{i+1}$ par s_0 sur $X^{i+1} \times \{0\}$, s_1 sur $X^{i+1} \times \{1\}$ et s sur $X^i \times (0, 1)$. Une homotopie s_t entre s_0 et s_1 existe si et seulement si \tilde{s} s'étend à $(X \times I)^{i+2}$; c'est-à-dire si et seulement si la classe $w_{\tilde{s}}$ est triviale dans $H^{i+2}(X \times I; \pi_{i+1}(F \times I))$. La formule de Künneth donne l'isomorphisme

$$\begin{aligned} H^{i+2}(X \times I; \pi_{i+1}(F \times I)) &\cong \bigoplus_{k+l=i+2} H^k(X; \pi_{i+1}(F)) \otimes H^l(I, \partial I; \pi_{i+1}(F)) \\ &\cong H^{i+1}(X; \pi_{i+1}(F)) \otimes H^1(I, \partial I; \pi_{i+1}(F)) \\ &\cong H^{i+1}(X; \pi_{i+1}(F)) \otimes \pi_{i+1}(F) \\ &\cong H^{i+1}(X; \pi_{i+1}(F)). \end{aligned}$$

En particulier, une extension de s est unique à homotopie près lorsque $H^{i+1}(X; \pi_{i+1}(F)) = 0$.

Dans ce qui suit, la condition $\pi_1(F) = \{1\}$ est respectée. Lorsque $\pi_1(F) \neq \{1\}$, la situation peut être généralisée en utilisant un système de coefficients locaux (Davis et Kirk, 2001, Section 7.10).

5.2.5 Obstruction de Kirby-Siebenmann

Appliquons la théorie de l'obstruction au fibré $\tau^*BPL \rightarrow M$.

$$\begin{array}{ccc} \tau^*BPL & \longrightarrow & BPL \\ \downarrow s & & \downarrow Bi \\ M & \xrightarrow{\tau} & BTOP \end{array}$$

Bi a comme fibre homotopique TOP/PL : c'est aussi la fibre de τ^*BPL . Par la discussion précédente, si une section s est définie sur le i -squelette de M , elle peut-être

étendue au $(i + 1)$ -squelette si et seulement si la classe w_s dans $H^{i+1}(M; \pi_i(TOP/PL))$ est triviale.

Kirby et Siebenmann démontrent que TOP/PL est homotopiquement équivalent à un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 3)$ (Kirby et Siebenmann, 1977, Essai V, Théorème 5.5).

Définition 5.2.7. Un espace d'Eilenberg-MacLane $K(G, n)$ est un espace topologique dont le seul groupe d'homotopie non trivial est $\pi_n(K(G, n)) \cong G$.

Il s'ensuit que les groupes de cohomologie $H^{i+1}(M; \pi_i(TOP/PL))$ sont triviaux pour tout $i \neq 3$. On peut donc trouver une section s'étendant jusqu'au 3-squelette de M . De plus, cette section restreinte au 2-squelette est unique à homotopie près car

$$H^2(M; \pi_2(TOP/PL)) = H^2(M; 0) = 0.$$

L'obstruction à l'existence d'une section s ne dépend donc que de M . Elle est bien définie et réside dans $H^4(M; \pi_3(TOP/PL)) = H^4(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Théorème 5.2.8. *Soit M une variété topologique. Il existe une classe*

$$\kappa(M) \in H_4(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

telle que M admet une structure PL si et seulement si $\kappa(M) = 0$.

5.2.6 Obstruction de Cohen-Martin-Sato-Sullivan

Alors que l'obstruction de Kirby-Siebenmann caractérise l'existence d'un relèvement vers BPL pour une variété topologique, l'obstruction de Cohen-Martin-Sato-Sullivan caractérise l'existence d'un tel relèvement pour une variété d'homologie combinatoire. Martin et Maunder (Martin et Maunder, 1971, Section 4) définissent un espace classifiant $EH \rightarrow BH$ pour les variétés d'homologie. De façon résumée, H est égal à $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n$ où H_n est un complexe simplicial (de Kan) pour lequel les m -simplexes sont des isomorphismes d'un certain type de S^{n-1} -fibré $\Delta^m \times S^{n-1}$ (dit *block*). Il s'avère que le groupe

PL est homotopiquement équivalent à un plongement dans H (Martin, 1973, Section 2). Ceci induit une fibration $H/PL \rightarrow BPL \xrightarrow{j} BH$. Comme ci-haut, l'existence d'une section de $\tau^*BPL \rightarrow M$ pour cette fibration réside dans l'étude de la fibre H/PL . Martin (Martin, 1973) démontre que $H/PL = K(\Theta_3^H, 3)$, ce qui permet de conclure que l'obstruction se trouve dans $H^4(M; \Theta_3^H)$.

$$\begin{array}{ccc}
 \tau^*BPL & \longrightarrow & BPL \\
 \downarrow s & & \downarrow Bj \\
 M & \xrightarrow{\tau} & BH
 \end{array}$$

Le rôle du groupe de cobordisme d'homologie Θ_3^H est mis de l'avant dans les constructions de Cohen, Sato et Sullivan. D'abord, Sullivan (Sullivan, 1971, Exemple ii) définit une résolution acyclique P d'une variété d'homologie combinatoire M comme étant une application surjective $f : P \rightarrow M$ où P est variété PL et $f^{-1}(x)$ est acyclique pour tout $x \in M$. Une telle résolution est obtenue à partir de M de la façon suivante, telle que décrite par Cohen (Cohen, 1970, Section 4; Martin, 1973, Section 1).

Considérons le complexe pseudocellulaire (composé de cellules d'homologie) dual au complexe simplicial de la triangulation de M , que nous notons M_0 . On cherche à construire à partir de M_0 un complexe pseudocellulaire M_n dont les cellules sont acycliques et PL. Pour ce faire, on modifiera successivement les cellules duales $D(\sigma)$ pour chaque simplexe σ en des cellules $D'(\sigma) \subset M_n$ afin de construire une résolution acyclique $f : M_n \rightarrow M_0$ avec $f(D'(\sigma)) = D(\sigma)$.

Regardons les cellules $D(\sigma)$ duales à σ de dimension $n - k$ pour chaque $k = 0, \dots, n$.

On a $D(\sigma) = C(Lk(\sigma))$, le cône du lien de σ . Posons $\hat{\sigma}$ l'apex de $C(Lk(\sigma))$ et notons que $\dim Lk(\sigma) = n - (n - k) - 1 = k - 1$.

Pour $k = 0, 1, 2, 3$, $H(Lk(\sigma)) = H(S^{k-1})$ implique que $Lk(\sigma) \cong S^{k-1}$ et que $D(\sigma)$ est une boule. En prenant $D'(\sigma) = D(\sigma)$ et $f_3 = Id_{M_0}$, on a une résolution acyclique sur $D(\sigma)$.

Pour $k = 4$, considérons la subdivision barycentrique M' de M . $Lk(\sigma, M')$ est une variété d'homologie combinatoire et topologique (Lemmes 4.4.7 et 4.4.8) de dimension 3. L'invariant de Kirby-Siebenmann étant trivialement nul en dimension 3, $Lk(\sigma, M')$ est PL. Si $[Lk(\sigma, M')] = 0$ dans Θ_3^H , il existe une variété acyclique PL W ayant comme bord $Lk(\sigma, M')$. Soit $\nu\hat{\sigma}$ un voisinage de $\hat{\sigma}$ ayant $Lk(\sigma, M')$ comme bord. On pose $D'(\sigma) = D(\sigma) \setminus \nu\hat{\sigma} \cup_{Lk(\sigma)} W$ pour obtenir une variété M_4 composée des cellules $D'(\sigma)$ pour les simplexes σ de dimension $n - 4$, et des cellules $D(\tau)$ pour les autres simplexes τ . On définit $f_4 : M_4 \rightarrow M_0$ par $f_4(W) = \hat{\sigma}$ et $f_4 = Id$ ailleurs, ce qui donne une résolution acyclique sur les $D(\tau)$ duales aux simplexes τ de dimension $\geq n - 4$.

Pour $k = 5$, une 5-cellule dans M_4 , duale d'un $n - 5$ simplexe σ , a un bord composé de 4-cellules PL construites précédemment. Ce bord, homéomorphe à $Lk(\sigma, M_4)$, est une 4-sphère d'homologie car M_4 est duale à une variété d'homologie combinatoire. Par Kervaire (Remarque, p. 49), il existe une variété acyclique PL W ayant $Lk(\sigma, M_4)$ comme bord. On mime la construction précédente pour obtenir M_5 avec des 5-cellules $D'(\sigma) = D(\sigma) \setminus \nu\hat{\sigma} \cup_{Lk(\sigma, M_4)} W$ et f_5 une résolution acyclique sur les $D(\tau)$ duales aux simplexes τ de dimension $\geq n - 5$.

Pour $k = 6, \dots, n$, toute $(k - 1)$ -sphère d'homologie est bord d'une variété acyclique PL par Kervaire. Ceci permet de répéter le processus pour toutes les cellules duales et d'obtenir une variété PL M_n . On obtient $f = f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_3$ la résolution acyclique voulue.

La seule obstruction à cette construction est l'existence d'un $(n - 4)$ -simplexe σ tel que $[Lk(\sigma)] \neq 0 \in \Theta_3^H$. En posant

$$c(M) = \sum_{\dim \sigma = n-4} [Lk(\sigma)] \sigma \in H_{n-4}(M; \Theta_3^H) \cong H^4(M; \Theta_3^H),$$

on a démontré

Proposition 5.2.9. *Soit M variété d'homologie combinatoire. Si $c(M) = 0 \in H^4(M; \Theta_3^H)$, alors il existe une résolution acyclique de M .*

Edmonds et Stern (Edmonds et Stern, 1975, Corollaire 5.3) montrent que de telles résolutions sont en bijection avec les relèvements $M \rightarrow BPL$ de $BPL \rightarrow BH$ décrits plus haut. Par une construction similaire à celle de Cohen, Sato (Sato, 1972, Section 4) obtient même un homéomorphisme entre M et une variété PL lorsque $c(M) = 0$. Réciproquement, une résolution acyclique $f : P \rightarrow M$ induit un isomorphisme f^* en cohomologie pour lequel $f^*(c(M)) = c(P)$; il s'ensuit que $c(M) = 0$ (Martin, 1973, p. 199).

En conclusion,

Théorème 5.2.10. *Une variété d'homologie combinatoire M admet une structure PL si et seulement si $c(M) = 0 \in H^4(M; \Theta_3^H)$.*

5.2.7 Homomorphisme de Rokhlin

Dans le cas où la variété d'homologie combinatoire M est aussi une variété topologique, les obstructions $\kappa(M)$ et $c(M)$ sont intimement liées.

L'homomorphisme de Rokhlin $\mu : \Theta_3^H \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est défini par

$$\mu([Y]) = \sigma(W)/8 \pmod{2},$$

où W est une variété compacte, lisse, telle que $w_2(W) = 0$ et qui a Y comme bord et $\sigma(W)$ est la signature de W .

Remarque. Une variété dont la deuxième classe de Stiefel-Whitney est triviale est dite *spin*. Les structures spin sont introduites en détail au chapitre 6.

Remarque. Toute variété de dimension 3 est bord d'une variété spin de dimension 4 (Kirby, 1989, Théorème 7.3).

Montrons que cette application est bien définie.

Soit W' une autre variété compacte, lisse et spin ayant Y comme bord. Alors $W \cup_Y W'$ est une 4-variété compacte, lisse et spin. Par le théorème de Rokhlin, sa signature est

divisible par 16. Par additivité de Novikov,

$$\begin{aligned}
0 &= \sigma(W \cup_Y -W')/8 \pmod{2} \\
&= \sigma(W)/8 + \sigma(-W')/8 \pmod{2} \\
&= \sigma(W)/8 - \sigma(W')/8 \pmod{2}.
\end{aligned}$$

Remarque. La valeur $\sigma(W)/8 \pmod{2}$ est l'*invariant de Rokhlin* de la 3-variété orientée Y . Notons que si $[Y] = 0 \in \Theta_3^H$, alors $\sigma(W) = 0$. En effet, soit W' un cobordisme entre Y et S^3 ; on a $\sigma(W') = 0$ car $H_2(W') \cong H_2(S^3) = 0$ et alors

$$\begin{aligned}
\sigma(W)/8 \pmod{2} &= \sigma(W' \cup_{S^3} B^4)/8 \pmod{2} \\
&= \sigma(W')/8 + \sigma(B^4)/8 \pmod{2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Soit Y' un autre représentant de $[Y]$. $Y \# -Y'$ est cobordant à S^3 et est bord d'une variété W'' de signature 0 par la remarque précédente. De plus, W'' est somme connexe de $W, -W'$, des variétés de bords respectifs $Y, -Y'$. La signature d'une somme connexe de 4-variétés est additive : la somme fait intervenir des 3-cellules dans les bords Y, Y' , ce qui ne modifie pas les deuxièmes groupes de cohomologie de W et W' . Alors

$$\begin{aligned}
0 &= \sigma(W'')/8 \pmod{2} \\
&= \sigma(W \# -W')/8 \pmod{2} \\
&= \sigma(W)/8 + \sigma(-W')/8 \pmod{2} \\
&= \sigma(W)/8 - \sigma(W')/8 \pmod{2},
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\mu([Y]) = \mu([Y'])$.

L'homomorphisme de Rokhlin est surjectif car la sphère d'homologie de Poincaré est bord d'une variété lisse et spin de signature 8 (Prop. 4.3.2). Par conséquent, il donne lieu à la suite exacte courte suivante

$$0 \rightarrow \ker \mu \longrightarrow \Theta_3^H \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

qui induit l'exactitude de la suite suivante en homologie.

$$H_{n-4}(M; \ker \mu) \rightarrow H_{n-4}(M; \Theta_3^H) \xrightarrow{\mu_*} H_{n-4}(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-5}(M; \ker \mu)$$

L'homomorphisme μ_* envoie un élément $\sum [Y]\sigma^{n-4} \in H_{n-4}(M; \Theta_3^H)$ sur l'élément $\sum \mu([Y])\sigma^{n-4} \in H_{n-4}(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Si M est PL, l'image de l'obstruction $c(M)$ (Section 5.2.6) est 0. Réciproquement, si $\mu_*(c(M)) = 0$, alors $\mu_*([Lk(\sigma)]) = 0$ pour tout $(n-4)$ -simplexe σ . Siebenmann démontre que ceci confère à $C(Lk(\sigma))$ une structure PL (Siebenmann, 1970, pp. 81-82). Ainsi, les cellules duales $D(\sigma) \cong C(Lk(\sigma))$ sont déjà PL : dans la construction d'une résolution acyclique de M , il suffit de prendre $D'(\sigma) = D(\sigma)$ pour avoir $M_4 = M_0$ et $f_4 = Id$. Par le théorème 5.2.10, on a $c(M) = 0$.

En conclusion, en passant au dual en cohomologie, l'obstruction de Kirby-Siebenmann est précisément l'image de celle de Cohen-Martin-Sato-Sullivan.

Proposition 5.2.11. *Si M est une variété d'homologie combinatoire et une variété topologique, alors $\kappa(M) = \mu^*(c(M))$.*

5.3 Caractérisation de l'existence des triangulations de variétés topologiques

La théorie de l'obstruction permet de réduire le problème d'existence des triangulations en dimension 5 et plus à un problème de basse dimension. En effet, l'existence de triangulations repose sur l'étude du groupe de cobordisme d'homologie Θ_3^H .

Théorème 5.3.1 (Galewski-Stern, Matumoto, 1980). *Toute variété topologique fermée de dimension 5 et plus possède une triangulation si et seulement s'il existe un élément $[Y] \in \Theta_3^H$ d'ordre 2 tel que $\mu([Y]) = 1$.*

5.3.1 Obstruction de Galewski-Stern-Matsumoto

Au chapitre précédent, nous avons vu qu'une variété topologique est triangulable si et seulement si elle est une variété d'homologie combinatoire (Lemme 4.4.6). Nous nous intéressons donc à la fibration $TOP/H \rightarrow BH \xrightarrow{Bt} BTOP$ et à l'existence d'une section de $\tilde{\tau}^*BH$ pour une application classifiante $\tau : M \rightarrow BTOP$.

$$\begin{array}{ccc}
 \tau^*BH & \longrightarrow & BH \\
 \downarrow \scriptstyle s_i & & \downarrow \scriptstyle Bt \\
 M & \xrightarrow{\tau} & BTOP
 \end{array}$$

Lemme 5.3.2. $TOP/H = K(\ker \mu, 4)$.

Démonstration. Nous esquissons ici les grandes lignes de la démonstration. Galewski-Stern et Matsumoto montrent que le diagramme suivant est commutatif dans la catégorie des espaces topologiques à homotopie près.

$$\begin{array}{ccc}
 BPL & \xrightarrow{Bj} & BH \\
 \downarrow \scriptstyle Bi & & \downarrow \scriptstyle Bt \\
 & & BTOP
 \end{array}$$

Il donne lieu aux inclusions $BPL \hookrightarrow M_{Bj} \hookrightarrow \tilde{M}_{Bi}$ où M_{Bj} est le cylindre d'application de Bj et $\tilde{M}_{Bi} = M_{Bj} \cup_{BH} M_{Bt}$. Elles induisent une longue suite exacte en homotopie.

$$\begin{aligned}
 \cdots \rightarrow \pi_{n+1}(\tilde{M}_{Bi}, M_{Bj}) &\rightarrow \pi_n(M_{Bj}, BPL) \rightarrow \pi_n(\tilde{M}_{Bi}, BPL) \\
 &\rightarrow \pi_n(\tilde{M}_{Bi}, M_{Bj}) \rightarrow \pi_{n-1}(M_{Bj}, BPL) \rightarrow \cdots
 \end{aligned}$$

Puisque les cylindres M_{Bj} et \tilde{M}_{Bi} sont homotopiquement équivalents à BH et $BTOP$ respectivement, ces inclusions et leur composition ont les mêmes fibres homotopiques

que les flèches correspondantes du diagramme précédent.

$$\begin{array}{ccc}
 BPL & \xleftarrow{Bj} & M_{Bj} \\
 & \searrow^{Bi} & \swarrow_{Bt} \\
 & & \widetilde{M}_{Bi}
 \end{array}$$

Pour une fibration homotopique $F \rightarrow A \rightarrow X$, on a $\pi_n(X, A) \cong \pi_{n-1}(F)$. La longue suite exacte devient donc

$$\begin{aligned}
 \cdots \rightarrow \pi_n(TOP/H) \rightarrow \pi_{n-1}(H/PL) \rightarrow \pi_{n-1}(TOP/PL) \\
 \rightarrow \pi_{n-1}(TOP/H) \rightarrow \pi_{n-2}(H/PL) \rightarrow \cdots
 \end{aligned}$$

Sachant que $TOP/PL = K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 3)$ et $H/PL = K(\Theta_3^H, 3)$, la suite se simplifie à

$$0 \rightarrow \pi_4(TOP/H) \rightarrow \Theta_3^H \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \pi_3(TOP/H) \rightarrow 0.$$

Les démonstrations des égalités $TOP/PL = K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 3)$ et $H/PL = K(\Theta_3^H, 3)$ par Kirby-Siebenmann et Martin impliquent que la flèche $\Theta_3^H \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de la suite exacte est en fait l'homomorphisme de Rokhlin μ . Ce dernier est surjectif, si bien que la suite s'écourte pour donner

$$0 \rightarrow \pi_4(TOP/H) \longrightarrow \Theta_3^H \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

et on obtient l'égalité $\pi_4(TOP/H) = \ker \mu$. Ceci démontre que la fibre TOP/H est un espace d'Eilenberg-Maclane $K(\ker \mu, 4)$. \square

L'obstruction à la triangulation d'une variété topologique M se trouve donc dans le groupe de cohomologie $H^5(M; \ker \mu)$. Il s'avère que cette obstruction est l'image par l'homomorphisme connecteur de $\kappa(M) \in H^4(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ dans la longue suite exacte en cohomologie associée à la suite exacte courte précédente.

5.3.2 Démonstration du théorème de Galewski-Stern-Matsumoto

Ayant ces obstructions en main, le théorème de Galewski-Stern et Matsumoto découle maintenant d'un argument algébrique.

Démonstration. (Théorème 5.3.1) Supposons qu'il existe $[Y] \in \Theta_3^H$ d'ordre 2 tel que $\mu([Y]) = 1$. L'homomorphisme $\alpha : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \Theta_3^H$, $\alpha(1) = [Y]$ est bien défini et est une rétraction de μ dans la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \ker \mu \longrightarrow \Theta_3^H \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

ce qui la scinde. L'exactitude de la suite est préservée après application du foncteur additif $\text{Hom} : H^4(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^5(M; \ker \mu)$ est trivial. L'obstruction à la triangulation est triviale pour tout M ; il en résulte que toute variété topologique est triangulable.

Réciproquement, Galewski et Stern ont construit une variété fermée M de dimension 5 telle que $Sq^1\kappa(M) \neq 0$; supposons-la triangulable (Galewski et Stern, 1979 et Corollaire 9.2.2). Considérons θ le sous-groupe de Θ_3^H engendré par les classes des liens des 1-simplexes de M . Ce sous-groupe est finiment engendré car on peut supposer la triangulation de M finie vu que M est fermée. Par la classification des groupes abéliens finiment engendrés, un générateur $[W]$ de θ engendre un sous-groupe isomorphe soit à \mathbb{Z} , soit à $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ où p premier.

Supposons que Θ_3^H ne contienne aucun élément $[Y] \in \Theta_3^H$ d'ordre 2 tel que $\mu([Y]) = 1$. Si un générateur $[W]$ est tel que $\mu([W]) = 1$ et le sous-groupe qu'il engendre est de la forme $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$, on doit avoir que p^k est un multiple de 4. En effet, p^k est pair car

$$0 = \mu(p^k[W]) = p^k \mu([W]) = p^k \cdot 1 = p^k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z};$$

de plus, $p^k \geq 3$ car $[W]$ n'est pas d'ordre 2 : les seules puissances d'un nombre premier paires sont les puissances de 2.

Définissons un homomorphisme $\gamma : \theta \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ comme suit. Pour un générateur $[W]$ de θ ,

$$\begin{aligned} \gamma : \theta &\longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ [W] &\longmapsto 0 \quad \text{si } \mu([W]) = 0 \\ [W] &\longmapsto 1 \quad \text{si } \mu([W]) = 1 \end{aligned}$$

Cet homomorphisme est bien défini car si $\mu([W]) = 1$, $[W]$ engendre un sous-groupe isomorphe soit à \mathbb{Z} , soit à $\mathbb{Z}/4q\mathbb{Z}$ pour un $q \geq 1$.

On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \theta & \hookrightarrow & \Theta_3^H & \\ & & & \downarrow \gamma & & \downarrow \mu & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \xrightarrow{r} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

où r est la réduction modulo 2. Il induit un diagramme commutatif en cohomologie

$$\begin{array}{ccccc} H^4(M; \theta) & \hookrightarrow & H^4(M; \Theta_3^H) & & \\ \downarrow \gamma^* & & \downarrow \mu^* & & \\ H^4(M; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) & \xrightarrow{r^*} & H^4(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{Sq^1} & H^5(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \end{array}$$

où la ligne du bas est exacte.

Soit $c(M) \in H^4(M; \Theta_3^H)$ l'obstruction de Cohen-Martin-Sato-Sullivan. Les coefficients de $c(M)$ sont les classes des liens des 1-simplexes de M : $c(M)$ est un élément de $H^4(M; \theta)$.

Par exactitude, on a $Sq^1 r^* = 0$. La commutativité donne alors

$$0 = Sq^1 r^* \gamma^* c(M) = Sq^1 \mu^* c(M) = Sq^1 \kappa(M),$$

ce qui contredit l'hypothèse $Sq^1 \kappa(M) \neq 0$.

La variété M de Galewski-Stern n'est pas triangulable s'il n'existe pas d'élément $[Y] \in \Theta_3^H$ tel que $\mu([Y]) = 1$. \square

Il s'ensuit que l'existence des triangulations en dimensions 5 et plus repose entièrement sur l'étude du groupe de cobordisme d'homologie.

CHAPITRE VI

STRUCTURES SPIN ET SPIN^C

Le théorème de Galewski-Stern-Matsumoto recentre notre intérêt sur les variétés de dimension 3. Ces variétés ont la particularité d'être toutes munies de structures spin et spin^c, que nous décrivons dans le présent chapitre en se basant sur la présentation de Friedrich, 2000.

6.1 Groupes Pin(*n*) et Spin(*n*)

Définissons les groupes Pin(*n*) et Spin(*n*) pour $n \geq 1$.

Considérons l'algèbre de Clifford de \mathbb{R}^n muni de la forme $Q(x) = -\sum_{i=1}^n x_i^2 = -\|x\|^2$

$$C_n = \bigoplus_{k=0}^n (\mathbb{R}^n)^{\otimes k} / (x \otimes x = -\|x\|^2 \in \mathbb{R}).$$

Définition 6.1.1. Le groupe Pin(*n*) est donné par la présentation

$$\text{Pin}(n) = \langle S^{n-1} \mid -x^2 = \|x\|^2 = 1; xy = -yx, \forall x \perp y \rangle,$$

où l'opération de groupe est héritée du produit tensoriel dans C_n .

Un élément de Pin(*n*) s'écrit $x_1 \dots x_m$, pour $1 \leq m \leq n$ où $x_i \in S^{n-1}$.

Remarques. 1. La multiplication $(x_1 \dots x_m)(y_1 \dots y_l)$ dans Pin(*n*) correspond à $x_1 \otimes \dots \otimes x_m \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_l$ dans C_n . Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\alpha \otimes y \in \mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}^n)^{\otimes k} \cong (\mathbb{R}^n)^{\otimes k}$.

On écrit donc $\alpha \otimes y = \alpha y \in (\mathbb{R}^n)^{\otimes k}$. En considérant l'élément neutre de Pin(*n*)

comme $1 \in \mathbb{R} \subset C_n$, dans $\text{Pin}(n)$, on a $1x = x = x1$.

2. La deuxième relation dans $\text{Pin}(n)$ vient du fait que si $x \perp y \in S^{n-1} \subset C_n$, alors $xy = -yx$ dans C_n : en effet,

$$xy + yx = (x + y)^2 - x^2 - y^2 = -\|x + y\|^2 + 2 = -2 + 2 = 0.$$

3. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est sous-groupe de $\text{Pin}(n)$. En effet, pour $x \in S^{n-1}$, $x^2 = -1$ est involutif.
4. Posant $\gamma(x_1 \dots x_m) = (x_m \dots x_1)$ et $\beta(x_1 \dots x_m) = (-x_1) \dots (-x_m)$, on a que $\gamma\beta(x_1 \dots x_m)$ est l'inverse de $x_1 \dots x_m$ dans $\text{Pin}(n)$.

Définition 6.1.2. Le groupe $\text{Spin}(n)$ est le sous-groupe de $\text{Pin}(n)$

$$\text{Spin}(n) = \text{Pin}(n) \cap C_n^0$$

où C_n^0 est la sous-algèbre de C_n invariante sous β .

- Remarques.** 1. $\text{Spin}(n)$ est composé des éléments $x_1 \dots x_m$ de $\text{Pin}(n)$ où m est pair ;
 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, -1\}$ est aussi sous-groupe de $\text{Spin}(n)$.
2. $\gamma(x_1 \dots x_m)$ est l'inverse de $x_1 \dots x_m$ dans $\text{Spin}(n)$.

Les deux lemmes suivants nous seront utiles pour la résultat principal de la section suivante.

Lemme 6.1.3. Soient $y \in \mathbb{R}^n \subset C_n$ et $x = x_1 \dots x_m \in \text{Pin}(n)$, $x_i \in S^{n-1}$. Alors $xy\gamma(x)$ est élément de $\mathbb{R}^n \subset C_n$.

Démonstration. Montrons que $x_1 y \gamma(x_1) = x_1 y x_1$ est la réflexion de y le long du plan perpendiculaire à x pour une base orthonormée e_1, \dots, e_n de \mathbb{R}^n où $e_1 = x_1$. On a

$$x_1 y x_1 = e_1 \left(\sum_{i=1}^n y_i e_i \right) e_1 = \left(-y_1 - \sum_{i=2}^n y_i e_i e_1 \right) e_1 = -y_1 e_1 + \sum_{i=1}^n y_i e_i.$$

Par récurrence, pour tout m , on a que $x_1 \dots x_m y \gamma(x_1 \dots x_m)$ est une réflexion de $x_2 \dots x_m y \gamma(x_2 \dots x_m) \in \mathbb{R}^n$. C'est bien un élément de \mathbb{R}^n . \square

Lemme 6.1.4. *L'application $\lambda : \text{Pin}(n) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, $\lambda(x)(y) = xy\gamma(x)$, est un homomorphisme de groupes de Lie.*

Démonstration. $\lambda(xx')(y) = xx'y\gamma(xx') = xx'y\gamma(x')\gamma(x) = \lambda(x)\lambda(x')(y)$ □

6.2 Revêtement universel de $SO(n)$

Dans cette section, nous démontrons le résultat suivant.

Proposition 6.2.1. *$\lambda : \text{Spin}(n) \rightarrow SO(n)$ est revêtement de degré 2 et revêtement universel de $SO(n)$, pour tout $n \geq 3$.*

Lemme 6.2.2. *$\lambda : (\text{Pin}(n), \text{Spin}(n)) \rightarrow (O(n), SO(n))$ est surjectif.*

Démonstration. Soit $A \in O(n)$: A est une composition de réflexions A_1, \dots, A_m . Par le lemme 6.1.3, $A = \lambda(x_1 \dots x_m)$ où $x_i \in S^{n-1}$ vecteurs perpendiculaires aux axes de réflexion des A_i .

Puisque $\lambda(x_i)$ est une réflexion, $\det \lambda(x_i) = -1$. Si m est pair, alors $\det \lambda(x_1 \dots x_m) = \det(\lambda(x_1) \dots \lambda(x_m)) = \det \lambda(x_1) \dots \det \lambda(x_m) = (-1)^m = 1$, d'où $\lambda(\text{Spin}(n)) \subset SO(n)$. Réciproquement, si $A \in SO(n)$, alors $\det A = 1$ et A est une rotation. A est composition d'un nombre pair de réflexions : comme ci-haut, il existe $x_1 \dots x_m \in \text{Spin}(n)$ tel que $A = \lambda(x_1 \dots x_m)$. □

Lemme 6.2.3. *$\lambda : \text{Spin}(n) \rightarrow SO(n)$ est un revêtement avec $\ker \lambda \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Soit $x \in \ker \lambda$. Alors $xyx^{-1} = xy\gamma(x) = \lambda(x)(y) = Id(y) = y$, d'où $xy = yx$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. Alors $x \in Z(C_n) \cap Z(C_n^0) = \mathbb{R}$. Les seuls éléments réels de $\text{Spin}(n)$ sont 1 et -1 . Réciproquement, $\lambda(1) = 1y1 = y$ et $\lambda(-1) = -1y(-1) = y$. On en conclut que $\ker \lambda = \{-1, 1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Le groupe $\ker \lambda$ agit librement et proprement sur $\text{Spin}(n)$ par multiplication à gauche : par le théorème de variété quotient, la projection $\text{Spin}(n) \rightarrow \text{Spin}(n)/\ker \lambda$ est une

submersion. Le premier théorème d'isomorphisme donne lieu à l'isomorphisme de groupes de Lie $\text{Spin}(n)/\ker \lambda \cong \text{SO}(n)$. La surjection λ est donc une submersion par composition d'une submersion et d'un difféomorphisme et ainsi, λ est une application ouverte. Il existe un voisinage U de $1 \in \text{Spin}(n)$ ne contenant pas -1 . $\lambda|_U : U \rightarrow \lambda(U) \in \text{SO}(n)$ est une bijection car $\ker \lambda|_U = \{1\}$. λ étant ouverte, il en est de même pour $\lambda|_U$: il s'ensuit que $\lambda|_U$ est homéomorphisme. Par translation, pour tout $\sigma \in \text{SO}(n)$, on a $\sigma U \cong \lambda(\sigma U) \ni \sigma$ faisant de λ un revêtement de $\text{SO}(n)$. \square

Lemme 6.2.4. *$\text{Spin}(n)$ est connexe pour tout $n \geq 2$.*

Démonstration. Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ base de \mathbb{R}^n . Posons

$$\alpha(t) = (\cos(\pi t/2)e_1 + \sin(\pi t/2)e_2) \cdot (\cos(\pi t/2)e_1 + \sin(\pi t/2)e_2).$$

On a $\|\cos(\pi t/2)e_1 \pm \sin(\pi t/2)e_2\| = \sqrt{\cos^2(\pi t/2) + \sin^2(\pi t/2)} = 1$, indiquant que $\alpha(t)$ est bien produit d'un nombre pair d'éléments de S^{n-1} , donc élément de $\text{Spin}(n)$ pour tout t . On a $\alpha(0) = (0 + e_2)(0 - e_2) = 1$ et $\alpha(1) = (e_1 + 0)(e_1 - 0) = -1$.

Puisque $\text{SO}(n)$ est connexe, il existe un chemin joignant $\lambda(x)$ et $\lambda(1)$ pour tout $x \in \text{Spin}(n)$. Puisque λ est revêtement, il en existe un relèvement α_x joignant x ou $-x \in \lambda^{-1}(x)$ à $1 \in \text{Spin}(n)$. Sans perte de généralité (quitte à multiplier par -1 tout ce qui suit), supposons que $\alpha_x(0) = x$. Soit $y \in \text{Spin}(n)$. Si $\alpha_y(0) = y$, la concaténation $\alpha_y^{-1} * \alpha_x$ est un chemin de x à y . Si $\alpha_y(0) = -y$, la concaténation $-\alpha_y^{-1} * \alpha_x$ est le chemin voulu. \square

Lemme 6.2.5. *$\text{Spin}(n)$ est simplement connexe pour tout $n \geq 3$.*

Démonstration. Par les lemmes précédents, $\text{Spin}(n)$ est connexe et revêt doublement $\text{SO}(n)$. Ce dernier a comme groupe fondamental $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ lorsque $n \geq 3$. L'image de $\pi_1(\text{Spin}(n))$ par l'homomorphisme injectif $\lambda_\# : \pi_1(\text{Spin}(n)) \rightarrow \pi_1(\text{SO}(n))$ induit par λ est un sous-groupe d'indice 2 dans $\pi_1(\text{SO}(n)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il s'ensuit que $\pi_1(\text{Spin}(n))$ est le groupe trivial, unique sous-groupe d'indice 2 de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. \square

Démonstration. (Prop. 6.2.1) Par ces lemmes, nous avons montré que $\text{Spin}(n)$ est revêtement de degré 2 simplement connexe de $SO(n)$. Par unicité du revêtement universel en tant que revêtement simplement connexe, nous avons démontré la proposition. \square

6.3 Structure spin

Le revêtement universel λ nous permet d'étudier certains espaces topologiques à travers un fibré $\text{Spin}(n)$ -principal. Nous définissons cette structure et en explorons des particularités lorsque l'espace est une variété lisse.

6.3.1 Structure spin d'un complexe CW

Soit X un complexe CW connexe.

Définition 6.3.1. Une *structure spin* sur un fibré $SO(n)$ -principal $p : P_{SO} \rightarrow X, n \geq 3$, est la donnée d'un fibré $\text{Spin}(n)$ -principal $p' : P_{\text{Spin}} \rightarrow X$ et d'un revêtement de degré 2, $\Lambda : P_{\text{Spin}} \rightarrow P_{SO}$, tels que le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccc}
 P_{\text{Spin}} \times \text{Spin}(n) & \xrightarrow{\Lambda \times \lambda} & P_{SO} \times SO(n) \\
 \downarrow \rho' & & \downarrow \rho \\
 P_{\text{Spin}} & \xrightarrow{\Lambda} & P_{SO} \\
 & \searrow p' & \swarrow p \\
 & & X
 \end{array}$$

où ρ' et ρ sont les actions de groupes respectives sur P_{Spin} et P_{SO} .

Deux structures spin Λ_1, Λ_2 sont *équivalentes* s'il existe f $\text{Spin}(n)$ -équivariante telle que $\Lambda_1 = \Lambda_2 f$. On considèrera pour la suite les structures spin à équivalence près.

Soit F fibre de p et α générateur de $\pi_1(F) \cong \pi_1(SO(n)) \cong \mathbb{Z}/2$. On peut montrer (Friedrich, 2000, p. 36) que les structures spin sur X (à équivalence près) sont en correspondance avec les sous-groupes d'indice 2 de $\pi_1(P_{SO})$ ne contenant pas $i_{\#}\alpha$, où $i_{\#}$ est induite par l'inclusion $F \hookrightarrow P_{SO}$. Soit H un tel sous-groupe. Alors la composition

$\pi_1(F) \xrightarrow{i_\#} \pi_1(P_{SO}) \xrightarrow{f} \pi_1(P_{SO})/H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \pi_1(F)$ envoyant α sur $i_\#(\alpha)H$ est l'identité sur $\pi_1(F)$. Cette correspondance mène au résultat suivant qui caractérise l'existence d'une structure spin.

Proposition 6.3.2. *Un complexe CW connexe X muni d'un fibré $SO(n)$ -principal possède une structure spin si et seulement si la classe de Stiefel-Whitney de degré 2 du fibré est nulle.*

Démonstration. La fibration $F \rightarrow P_{SO} \rightarrow X$ donne lieu à la suite exacte (McCleary, 2001, Exemple 1.A)

$$H^1(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(P_{SO}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} H^1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} H^2(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

On définit la classe de Stiefel-Whitney de degré 2 par $w_2(X) = \partial(1)$.

Remarque. Cette définition est compatible avec la définition d'une classe de Stiefel-Whitney du fibré vectoriel associé.

Par exactitude, $w_2(X) = 0$ si et seulement s'il existe un élément $f \in H^1(P_{SO}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ tel que $i_*f = 1$. Par naturalité de l'homomorphisme d'Hurewicz h , on a la commutativité du diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \pi_1(F) & \xrightarrow{i_\#} & \pi_1(P_{SO}) & \xrightarrow{f} & \pi_1(F) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong H_1(F; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i_*} & H_1(P_{SO}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f} & H_1(F; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{array}$$

qui implique que $fi_\#$ est l'identité si et seulement si fi_* est l'identité. Par le théorème des coefficients universels, on peut voir $fi_* \in \text{Hom}(H_1(F; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ comme l'élément $i^*f \in H^1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

L'existence d'un f tel que $i_*f = 1$ est donnée par l'existence d'un $H \leq \pi_1(P_{SO})$ ne contenant pas l'image du générateur de $\pi_1(F)$; ce H est en correspondance avec une structure spin. \square

La dernière étape de la démonstration combinée à l'exactitude de la suite plus haut en $H^1(P_{SO}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ mène au corollaire suivant.

Corollaire 6.3.3. *Lorsque $w_2(X) = 0$, les structures spin de X sont en correspondance avec les éléments de $H^1(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.*

6.3.2 Structure spin d'une variété lisse

Soit M une variété lisse orientée de dimension n . On considère le fibré tangent TM , pour lequel on fixe une orientation (la variété TM étant orientée pour toute M orientée). On considère les ensembles de repères orthonormés orientés de toutes les fibres. Ils forment un fibré $SO(n)$ -principal au-dessus de M .

Définition 6.3.4. Une *structure spin* sur une variété lisse orientée est une structure spin sur son fibré de repères orthonormés.

Puisqu'une variété lisse est du même type homotopique qu'un complexe CW (Milnor, 1963, Théorème 3.5), la proposition 6.3.2 et la remarque donnent lieu au résultat suivant.

Proposition 6.3.5. *Une variété lisse orientée M possède une structure spin si et seulement si sa classe de Stiefel-Whitney de degré 2 est nulle. Si tel est le cas, les structures spin sont en correspondance avec les éléments de $H^1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.*

Corollaire 6.3.6. *Toute variété orientée de dimension 3 possède une structure spin.*

Démonstration. Une variété orientée Y de dimension 3 possède une trivialisatation de son fibré tangent $TY \cong Y \times \mathbb{R}^3$ (Milnor et Stasheff, 1974, Problème 12-B). Toutes les classes de Stiefel-Whitney de TY sont triviales (Milnor et Stasheff, 1974, Prop. 4.2). \square

6.4 Structure spin^c

Définition 6.4.1. Le groupe $\text{Spin}^c(n)$ est

$$\text{Spin}^c(n) = \text{Spin}(n) \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} S^1$$

où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit par multiplication par -1 . C'est donc dire que $[(g, z)] = [(-g, -z)]$ dans $\text{Spin}^c(n)$.

Soit $\lambda' : \text{Spin}^c \rightarrow SO(n)$ le morphisme tel que $\lambda'([g, z]) = \lambda(z)$, où $\lambda(z)$ est tel que discuté au lemme 6.1.4. Cette application est bien définie par la proposition 6.2.1.

Définition 6.4.2 (Friedrich, 2000). Soit $P_{SO(n)}(M)$ le fibré des repères orthonormés du fibré tangent d'une variété M . Une *structure spin^c* sur la variété M est un fibré $\text{Spin}^c(n)$ -principal $P_{\text{Spin}^c(n)}$ muni d'un morphisme de fibrés Λ tel que le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccc}
 P_{\text{Spin}^c(n)} \times \text{Spin}^c(n) & \xrightarrow{\Lambda \times \lambda'} & P_{SO(n)}(M) \times SO(n) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 P_{\text{Spin}^c(n)} & \xrightarrow{\Lambda} & P_{SO(n)}(M) \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & Y &
 \end{array}$$

où les flèches verticales sont les actions respectives des groupes de structure sur les fibres.

L'équivalence entre structures spin^c est analogue à celle entre structures spin (Déf. 6.3.1).

Proposition 6.4.3. *Une variété spin possède toujours une structure spin^c.*

Démonstration. Soit $\tilde{\Lambda} : P_{\text{Spin}} \rightarrow P_{SO}$ une structure spin sur une variété. Définissons les fibres $(P_{\text{Spin}^c})_x$ d'un fibré Spin^c -principal par $(P_{\text{Spin}^c})_x = (P_{\text{Spin}})_x \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} S^1$ et Λ par $\Lambda([g, z]) = \lambda(z)$. \square

Dans les chapitres qui suivent, nous alternerons entre la définition 6.4.2 et la définition suivante d'une structure spin^c sur une variété Y de dimension 3.

Définition 6.4.4 (Kronheimer et Mrowka, 2007). Une *structure spin^c* sur Y est un fibré hermitien S de rang 2 muni de la *multiplication de Clifford*

$$\rho : TY \rightarrow \text{End}(S)$$

telle qu'en chaque $T_y Y \cong \mathbb{R}^3$, pour toute base orthonormée $\{e_1, e_2, e_3\}$, il existe une base orthonormée de S pour laquelle les $\rho(e_i)$ s'expriment comme

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

pour $i = 1, 2, 3$. S est un *fibré spinoriel* au-dessus de Y .

Deux structures $\text{spin}^c(S, \rho)$ et (S', ρ') sont équivalentes s'il existe un isomorphisme de fibrés $\varphi : S \rightarrow S'$ tel que la base orthonormée de S' donnant $\rho'(e_i) = \sigma_i$ est obtenue en appliquant le changement de base φ à la base orthonormée de S donnant $\rho(e_i) = \sigma_i$.

Proposition 6.4.5. *Les définitions 6.4.2 et 6.4.4 ci-haut sont équivalentes.*

Démonstration. Supposons qu'on a une structure spin^c telle que décrite par la définition 6.4.2. Il suffit de construire le fibré spinoriel associé $S = P_{\text{Spin}^c(3)} \times_{\kappa} \mathbb{C}^2$ où κ est l'isomorphisme entre l'algèbre de Clifford complexifiée de \mathbb{R}^3 muni de la forme quadratique $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ et $\text{End}(\mathbb{C}^2) \oplus \text{End}(\mathbb{C}^2)$ (Friedrich, 2000, Prop., p. 13). En définissant la multiplication de Clifford ρ comme la restriction de κ à \mathbb{R}^3 suivie de la projection sur la première composante $\text{End}(\mathbb{C}^2)$, on a qu'il existe une base de S telle que $\rho(e_i) = \sigma_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

Réciproquement, supposons qu'on a une structure spin^c telle que décrite par la définition 6.4.4. Alors pour une base orthonormée $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $T_y Y$, il existe une base $\{s_1, s_2\}$ de S_y telle que $\rho(e_i) = \sigma_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

Supposons qu'une autre base $\{as_1 + bs_2, cs_1 + ds_2\}$ respecte cette condition pour la même base orthonormée de $T_y Y$. Alors la matrice de changement de base $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ commute avec chaque $\sigma_i, i = 1, 2, 3$. Ceci donne les relations $b = c = 0$ et $a = d$. C'est donc dire que les bases de S_y donnant $\rho(e_i) = \sigma_i$ diffèrent d'un multiple $t \in S^1$.

En considérant les bases orthonormées de S quotientées par cette action de S^1 , on forme le fibré $PU(2)$ -principal $P_{PU(2)}(S)$, où $PU(2) = U(2)/S^1$. Nous pouvons alors définir un morphisme de fibrés $\tilde{\rho} : P_{SO(3)}(Y) \rightarrow P_{PU(2)}(S)$ envoyant une base orthonormée

$\{e_1, e_2, e_3\} \in SO(3)$ de $T_y Y$ sur la classe de bases orthonormées $[\{s_1, s_2\}]$ telles que $\rho(e_i) = \sigma_i$. De plus, il y a un morphisme de fibrés entre le fibré $P_{U(2)}(S)$ des repères orthonormaux de S et $P_{PU(2)}(S)$, induit par le quotient $U(2) \rightarrow PU(2)$. Par conséquent, on obtient le carré pullback suivant dans la catégorie des fibrés principaux au-dessus de Y .

$$\begin{array}{ccc} P(\tilde{\rho}, q) & \dashrightarrow & P_{U(2)}(S) \\ \downarrow & & \downarrow q \\ P_{SO(3)}(Y) & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & P_{PU(2)}(S) \end{array} \quad (1)$$

Nous constatons que $\tilde{\rho}$ est en fait un isomorphisme. En effet, nous avons montré que ρ_y est injectif. Or, $SO(3)$ est isomorphe à $PU(2)$ via (voir Section 6.4.1 plus bas)

$$PU(2) \cong U(2)/S^1 \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(3).$$

Un morphisme injectif entre deux groupes de Lie de dimension finie isomorphes est un isomorphisme.

Dans la catégorie des groupes de Lie, nous avons le carré pullback suivant,

$$\begin{array}{ccc} \text{Spin}^c(3) & \xrightarrow{\kappa} & U(2) \\ \lambda' \downarrow & & \downarrow q \\ SO(3) & \xrightarrow{\tilde{\kappa}} & PU(2) \end{array}$$

où $\tilde{\kappa}$ est déterminé par les trois autres flèches. Montrons que ce morphisme est injectif. Soient $A, B \in SO(3)$ et $[g, z], [h, w] \in \text{Spin}^c(3)$ tels que $\lambda'([g, z]) = A, \lambda'([h, w]) = B$. Les définitions de λ', κ et q et la commutativité du carré donnent lieu aux implications suivantes,

$$\begin{aligned} & \tilde{\kappa}(A) = \tilde{\kappa}(B) \\ \implies & \tilde{\kappa}\lambda'([g, z]) = \tilde{\kappa}\lambda'([h, w]) \\ \implies & q\kappa([g, z]) = q\kappa([h, w]) \\ \implies & \kappa([g, z]) = t \cdot \kappa([h, w]), \text{ pour un } t \in S^1 \\ \implies & [g, z] = [h, tw] \in \text{Spin}^c(3) \cong SU(2) \times_{\mathbb{Z}_2} S^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\implies && g = \pm h \\
&\implies && \lambda(g) = \lambda(\pm h) = \lambda(h), \text{ car } \ker(\lambda) = \mathbb{Z}_2 \\
&\implies && \lambda'([g, z]) = \lambda'([h, w]) \\
&\implies && A = B
\end{aligned}$$

montrant l'injectivité de $\tilde{\kappa}$. Comme plus haut, l'isomorphisme $SO(3) \cong PU(2)$ fait de $\tilde{\kappa}$ un isomorphisme.

Nous avons montré que $\tilde{\rho}_y$ et $\tilde{\kappa}$ diffèrent d'un automorphisme de $SO(3)$. Par la propriété universelle du pullback (voir Section 6.4.2 plus bas), nous concluons que $P(\tilde{p}, q)$ est un fibré $\text{Spin}^c(3)$ -principal au-dessus de Y . En prenant

$$\lambda' : \lambda(\tilde{p}, q) \rightarrow P_{SO(3)}(Y)$$

égal à la flèche de gauche du carré (1), nous obtenons la commutativité du diagramme de la définition 6.4.2.

Finalement, les deux notions d'équivalence entre structures spin^c sont compatibles de la façon suivante. Un isomorphisme $f : P_{\text{Spin}^c} \rightarrow P'_{\text{Spin}^c}$ de structures spin^c induit un isomorphisme φ entre les fibrés associés $S = P_{\text{Spin}^c} \times_{\kappa} \mathbb{C}^2$ et $S' = P'_{\text{Spin}^c} \times_{\kappa'} \mathbb{C}^2$, où $\kappa' = \varphi \circ \kappa : C_3 \otimes \mathbb{C} \rightarrow \text{End}(S) \rightarrow \text{End}(S')$. La restriction $\rho' = \varphi \circ \rho = \varphi \circ \kappa|_{\mathbb{R}^3}$ donne la condition voulue pour l'équivalence de structures spin^c au sens de la définition 6.4.4. Réciproquement, un isomorphisme $\varphi : S \rightarrow S'$ de structures spin^c vues comme fibrés hermitiens induit un isomorphisme φ' entre les $PU(2)$ -fibrés $P_{PU(2)}(S)$ et $P_{PU(2)}(S')$ de la construction ci-haut. Par unicité du pullback, les fibrés $P(\tilde{\rho}, q)$ et $P(\varphi' \circ \tilde{\rho}, \varphi' \circ q)$ sont isomorphes via un morphisme spin^c -équivariant. \square

Remarque. Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une structure spin^c est d'avoir que la deuxième classe de Steifel-Whitney $w_2(Y)$ est la réduction modulo 2 de la première classe de Chern $c_1(L)$ d'un fibré \mathbb{C} -vectoriel L . Une autre définition de structure spin^c sur Y est qu'une structure spin^c est un fibré \mathbb{C} -vectoriel dont la première classe de Chern modulo 2 est égale à $w_2(Y)$ (Friedrich, 2000, pp. 48-49). Cette

caractérisation permet de voir qu'il existe une structure spin^c pour toute variété lisse de dimension 3, puisque $w_2(Y) = 0$ par trivialité du fibré tangent TY .

Nous terminons ce chapitre avec les détails algébriques cités dans la démonstration.

6.4.1 Isomorphisme $PU(2) \cong SO(3)$

Démonstration. On considère $SU(n) \leq U(n)$, et $Z(U(n)) = U(1) \triangleleft U(n)$, où

$$U(1) = \{\text{diag}_n(e^{i\theta}), 0 \leq \theta < 2\pi\} \cong S^1.$$

$SU(n) \cap U(1)$ est l'ensemble des racines n -èmes de l'unité, car $\det(\text{diag}_n(e^{i\theta})) = 1$ si et seulement si $e^{ni\theta} = 1$. On écrit $SU(n) \cap U(1) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Pour $A \in U(n)$, on peut écrire

$$A = \frac{A}{\det(A)^{1/n}} \det(A)^{1/n} I.$$

On a $\frac{A}{\det(A)^{1/n}} \in SO(n)$ car $\det\left(\frac{A}{\det(A)^{1/n}}\right) = \frac{\det(A)}{(\det(A)^{1/n})^n} = 1$ et

$\det(A)^{1/n} I \in U(1)$ car $\det(A) \in S^1$. C'est donc dire que $SU(n)U(1) = U(n)$.

Par le deuxième théorème d'isomorphisme,

$$\frac{SU(n)}{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong \frac{SU(n)}{SU(n) \cap U(1)} \cong \frac{SU(n)U(1)}{U(1)} \cong \frac{U(n)}{U(1)} \cong PU(n).$$

Lorsque $n = 2$, la suite exacte suivante

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow SU(2) \cong \text{Spin}(3) \rightarrow SO(3) \rightarrow 1,$$

donne lieu au résultat

$$SO(3) \cong \frac{SU(2)}{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \cong PU(2). \quad \square$$

6.4.2 Isomorphisme de pullbacks

Dans une catégorie quelconque avec pullbacks, soient deux isomorphismes $f, g : X \rightarrow Z$ et une flèche $Y \rightarrow Z$. Nous voulons montrer que les pullbacks $X \times_f Y$ et $X \times_g Y$ sont isomorphes.

Les isomorphismes f et g diffèrent d'un automorphisme $h : X \rightarrow X$; c'est-à-dire que $g = fh$. On obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 X \times_f Y & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{f} & Z \\
 h^{-1} \downarrow & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{g=fh} & Z
 \end{array}$$

Puisque $X \times_f Y$ fait commuter le rectangle extérieur, par la propriété universelle du pullback pour $X \times_g Y$, il existe une unique flèche $X \times_f Y \rightarrow X \times_g Y$ faisant commuter le diagramme suivant.

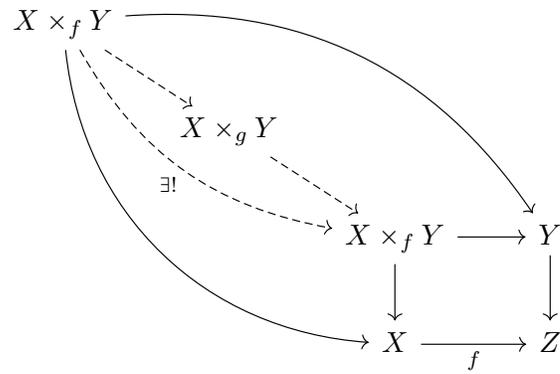
$$\begin{array}{ccccc}
 X \times_f Y & & & & \\
 \downarrow & \searrow \exists! & & & \\
 X & & X \times_g Y & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{h^{-1}} & X & \xrightarrow{g=fh} & Z
 \end{array}$$

De même, il existe une unique flèche $X \times_g Y \rightarrow X \times_f Y$ faisant commuter le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times_g Y & & & & \\
 \downarrow & \searrow \exists! & & & \\
 X & & X \times_f Y & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{h} & X & \xrightarrow{f} & Z
 \end{array}$$

La composition de ces deux flèches est l'unique flèche $X \times_f Y \rightarrow X \times_f Y$ faisant com-

monter le diagramme suivant.



Cette flèche ne peut être nulle autre que l'identité. Symétriquement, on aura que la composition $X \times_g Y \rightarrow X \times_f Y \rightarrow X \times_g Y$ est l'identité. Par conséquent, nous avons un isomorphisme $X \times_f Y \cong X \times_g Y$. \square

CHAPITRE VII

HOMOLOGIE DE FLOER

Avec la notion de structure spin^c en main, nous sommes fin prêtes à introduire l'homologie de Floer d'une variété de dimension 3. Tout au long de ce chapitre, nous suivons l'approche de Peter Kronheimer et Tomasz Mrowka (Kronheimer et Mrowka, 2007).

Leur version d'homologie de Floer est obtenue en étudiant les solutions aux équations de Seiberg-Witten pour une variété de dimension 3. Nous appliquerons cette théorie à des sphères d'homologie afin de mieux comprendre le groupe de cobordismes d'homologie Θ_3^H . Ainsi, au cours de ce chapitre, nous admettrons des résultats qui s'avèrent triviaux pour des sphères d'homologie. Nous citerons Kronheimer et Mrowka pour les détails se rapportant au cas général.

Dénotons par (Y, \mathfrak{s}) la variété compacte Y de dimension 3 munie d'une métrique et d'une structure spin^c $\mathfrak{s} = (S, \rho)$, où S est le fibré spinoriel au-dessus de Y et ρ la multiplication de Clifford associée (Déf. 6.4.4).

Soit ∇ la connection Levi-Civita sur TY .

Remarque. A priori, les constructions impliquant ∇ dépendent de la métrique sur Y ; elles s'avèrent équivalentes (Kronheimer et Mrowka, 2007).

7.1 Espace affine des connexions spin^c

Définition 7.1.1. Une connexion unitaire B sur S est une *connexion* spin^c si sa dérivée covariante ∇_B est telle que

$$\nabla_B(\rho(X)\psi) = \rho(\nabla(X))\psi + \rho(X)\nabla_B(\psi).$$

Une connexion B induit une connexion B^t sur le fibré en droites (complexes) $S \wedge S$

$$B^t(\varphi \wedge \psi) = B(\varphi) \wedge \psi + \varphi \wedge B(\psi).$$

Deux connexions spin^c B et B' sont telles que

$$\begin{aligned} (\nabla_B - \nabla_{B'}) (\rho(X)\psi) &= \rho(\nabla(X))\psi + \rho(X)\nabla_B(\psi) - \rho(\nabla(X))\psi - \rho(X)\nabla_{B'}(\psi) \\ &= \rho(X)(\nabla_B - \nabla_{B'}) (\psi). \end{aligned}$$

Or, $\rho|_{T_x M}$ étant une représentation irréductible de l'algèbre de Clifford de \mathbb{R}^3 , on a par le Lemme de Schur que $\nabla_B - \nabla_{B'}$ est un multiple de l'identité sur chaque fibre de S .

De plus, puisque B, B' sont unitaires, on a

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_B^X - \nabla_{B'}^X)\psi, \varphi \rangle + \langle \psi, (\nabla_B^X - \nabla_{B'}^X)\varphi \rangle \\ &= \langle \nabla_B^X \psi, \varphi \rangle + \langle \psi, \nabla_B^X \varphi \rangle - \langle \nabla_{B'}^X \psi, \varphi \rangle - \langle \psi, \nabla_{B'}^X \varphi \rangle \\ &= X \langle \psi, \varphi \rangle - X \langle \psi, \varphi \rangle = 0 \end{aligned}$$

ce qui fait de $\nabla_B^X - \nabla_{B'}^X$ un opérateur unitaire pour tout $X \in \Gamma(TM)$.

La différence $\nabla_B - \nabla_{B'}$ est donc élément de $\Omega^1(Y, \{\lambda Id_S, \lambda \in \mathbb{C}\} \cap U(S)) = \Omega^1(Y, \{i\lambda Id_S, \lambda \in \mathbb{R}\}) \cong \Omega^1(Y, i\mathbb{R})$.

Il s'ensuit que l'espace des connexions spin^c de (Y, \mathfrak{s}) , noté $\mathcal{A}(Y, \mathfrak{s})$, est un espace $\Omega^1(Y, i\mathbb{R})$ -affine.

On en déduit aussi que les connexions induites sur $S \wedge S$ sont des 1-formes à valeurs dans

$i\mathbb{R}$. En effet, posons $\nabla_{B^t}(\psi \wedge \varphi) = f + ig$, $\nabla_{B'^t}(\psi \wedge \varphi) = f' + ig'$ où $f, g, f', g' \in C^\infty(Y, \mathbb{R})$.

Alors

$$(\nabla_{B^t} - \nabla_{B'^t})(\psi \wedge \varphi) = (f - f')(\psi \wedge \varphi) + i(g - g')(\psi \wedge \varphi)$$

et

$$\begin{aligned} (\nabla_{B^t} - \nabla_{B'^t})(\psi \wedge \varphi) &= (\nabla_B - \nabla_{B'})\psi \wedge \varphi + \psi \wedge (\nabla_B - \nabla_{B'})\varphi \\ &= i\lambda\psi \wedge \varphi + \psi \wedge i\lambda\varphi \\ &= 2i\lambda(\psi \wedge \varphi) \end{aligned}$$

pour un $\lambda \in \mathbb{R}$, si bien que $f - f' = 0$. En inversant les rôles de B, B' , on obtient $f' - f = 0$, d'où $f = f' = 0$. En conclusion, les connexions induites sur $S \wedge S$ sont éléments de $\Omega^1(Y, i\mathbb{R})$.

7.2 Équations de Seiberg-Witten

Définition 7.2.1. Soit B une connection spin^c sur (Y, \mathfrak{s}) . L'opérateur de Dirac D_B est défini par

$$\begin{array}{ccc} D_B : \Gamma(S) & \xrightarrow{B} & \Gamma(TM^* \otimes S) \cong \Gamma(TM \otimes S) & \xrightarrow{\rho} & \Gamma(S) \\ \psi & \longmapsto & B(\psi) : x \mapsto \sum_i B(\psi)(x)e_i & \longmapsto & \sum_i \rho(e_i)\nabla_B^{e_i}(\psi) \end{array}$$

où $e_i, i = 1, 2, 3$ sont des coordonnées locales sur $T_x M$.

Définition 7.2.2. Les équations de Seiberg-Witten sont

$$\begin{aligned} F_{B^t} - \rho^{-1}(2\psi \otimes \psi^* + |\psi|^2 I_2) &= 0 \\ D_B(\psi) &= 0 \end{aligned}$$

où $F_{B^t} \in \Omega^2(Y, i\mathbb{R})$ est la forme de courbure de B^t et ρ est définie sur les 2-formes par

$$\rho(dx \wedge dy) = \frac{1}{2} \left(\rho(dx)\rho(dy) - \rho(dy)\rho(dx) \right).$$

Une solution (B, ψ) de ce système est dite *réductible* si $\psi = 0$ et *irréductible* sinon.

7.3 Action du groupe de jauge

Définition 7.3.1. Un *automorphisme d'une structure* spin^c est un automorphisme unitaire du fibré spinoriel S qui commute avec la multiplication de Clifford.

En d'autres mots, un automorphisme unitaire de fibré $u : S \rightarrow S$ est un automorphisme de structure spin^c si et seulement si

$$\rho(v)u|_{S_x} = u|_{S_x}\rho(v)$$

pour tout $v \in T_x Y$.

En particulier, $\sigma_1 u|_{S_x} = u|_{S_x} \sigma_1$ et $\sigma_2 u|_{S_x} = u|_{S_x} \sigma_2$. En posant $u|_{S_x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la première équation donne $b = c = 0$ et la deuxième $a = d$. La matrice $u|_{S_x}$ étant unitaire, on a $a \in S^1$. Ainsi, les automorphismes de structure spin^c peuvent être vus comme des applications

$$u : Y \rightarrow S^1.$$

Définition 7.3.2. Le *groupe de jauge* de (Y, \mathfrak{s}) est l'ensemble des automorphismes de structure spin^c pour la structure \mathfrak{s} , noté

$$G(Y, \mathfrak{s}) = \{u : Y \rightarrow S^1\}.$$

$G(Y, \mathfrak{s})$ agit sur $\mathcal{A}(Y, \mathfrak{s})$ par pullback. Par Leibniz, on a

$$B(\psi) = B(uu^{-1}\psi) = du \cdot u^{-1}\psi + uB(u^{-1}\psi).$$

Le terme de droite étant le pullback par u , on écrit l'action comme

$$u \cdot B = B - u^{-1}du.$$

$G(Y, \mathfrak{s})$ agit sur $\Gamma(S)$ par $u\psi(x) = u(x)\psi(x)$, multiplication scalaire de $\psi(x) \in \mathbb{C}^2$ par $u(x) \in S^1 \subset \mathbb{C}$.

Fixant un point de base $x_0 \in Y$, on pose $G_0(Y, \mathfrak{s}) = \{u \in G(Y, \mathfrak{s}) \mid u(x_0) = 1\}$ et

$$M = \left(\mathcal{A}(Y, \mathfrak{s}) \times \Gamma(S) \right) / G_0(Y, \mathfrak{s}).$$

Montrons que M est une variété. D'abord, $\mathcal{A}(Y, \mathfrak{s})$ et $\Gamma(S)$ sont des variétés car la première est un espace affine et la deuxième est une espace de fonctions lisses entre une variété compacte, Y , et une autre variété, le fibré vectoriel S (Golubitsky et Guillemin, 1973, Théorème III.1.11). Leur produit est donc une variété. Ensuite, $G_0(Y, \mathfrak{s})$ agit librement sur $\mathcal{A}(Y, \mathfrak{s}) \times \Gamma(S)$: en effet, B est fixé par les $u \in G(Y, \mathfrak{s})$ constants car $du = 0$ et l'unique tel élément de $G_0(Y, \mathfrak{s})$ est $u \equiv 1$. L'espace M est variété lisse en vertu du théorème de la variété quotient qui stipule qu'un quotient d'une variété lisse par une action libre et proprement discontinue d'un groupe topologique est une variété.

7.4 Champ de vecteurs invariant

Les équations de Seiberg-Witten peuvent être vues comme le gradient d'une fonctionnelle $L : \mathcal{A}(Y, \mathfrak{s}) \times \Gamma(S) \rightarrow \mathbb{R}$ de sorte que $-\nabla L = 0$, où ∇ indique le gradient, est équivalente aux équations de Seiberg-Witten.

Montrons que le champ de vecteurs $-\nabla L$, où ∇ est le gradient, est $G(Y, \mathfrak{s})$ -invariant.

D'abord,

$$u\psi \otimes (u\psi)^* - |u\psi|^2 I_2 = u\bar{u}\psi \otimes \psi^* - |\psi|^2 I_2 = \psi \otimes \psi^* - |\psi|^2 I_2$$

car $|u| = 1$. Ensuite,

$$\begin{aligned} F_{uB^t}(\psi \wedge \varphi) &= \nabla_{uB^t}^2(\psi \wedge \varphi) \\ &= \nabla_{uB^t}(\nabla_{uB}\psi \wedge \varphi + \psi \wedge \nabla_{uB}\varphi) \\ &= \nabla_{uB}^2\psi \wedge \varphi + \psi \wedge \nabla_{uB}^2\varphi + 2(\nabla_{uB}\psi \wedge \nabla_{uB}\varphi) \\ &= F_{uB}\psi \wedge \varphi + \psi \wedge F_{uB}\varphi + 2(\nabla_{uB}uu^{-1}\psi \wedge \nabla_{uB}uu^{-1}\varphi) \\ &= uF_Bu^{-1}\psi \wedge \varphi + \psi \wedge uF_Bu^{-1}\varphi + 2u^2(\nabla_B^{-1}\psi \wedge \nabla_B^{-1}\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u^2(F_B u^{-1}\psi \wedge \varphi + \psi \wedge F_B u^{-1}\varphi + 2(\nabla_B^{-1}\psi \wedge \nabla_B^{-1}\varphi)) \\
&= u^2 F_{B^t}(u^{-1}\psi \wedge u^{-1}\varphi) \\
&= u^2 (u^{-1})^2 F_{B^t}(\psi \wedge \varphi) \\
&= F_{B^t}(\psi \wedge \varphi).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$D_{uB}(u\psi) = B(u\psi) - u^{-1}(u\psi)du = uB(\psi) + du\psi - \psi du = uB(\psi) = uD_B(\psi).$$

Dans M , ceci donne lieu à l'égalité des classes $[D_{uB}(u\psi)] = [uD_B(\psi)] = [D_B(\psi)]$ si $u \in G_0(Y, \mathfrak{s})$. Il s'ensuit que le champ de vecteurs $-\nabla L$ induit un champ de vecteurs $[-\nabla L]$ bien défini sur M .

7.5 Éclatement

Maintenant, on voudrait appliquer les idées de l'homologie de Morse à l'aide de $[-\nabla L]$. Pour ce faire, il faut des points critiques isolés; or, si $[B, \psi]$ est point critique, les points $\{u[B, \psi], u \in G(Y, \mathfrak{s})\}$ sont aussi critiques en vertu de la $G(Y, \mathfrak{s})$ -invariance. En quotientant M par l'action résiduelle de $G(Y, \mathfrak{s})/G_0(Y, \mathfrak{s}) \cong S^1$, on obtient des points critiques isolés, mais M/S^1 n'est pas nécessairement une variété topologique. En effet, le groupe topologique S^1 n'agit pas librement car pour $u \in G(Y, \mathfrak{s})$ à valeur constante dans S^1 , on a $du = 0$ et alors

$$u[B, 0] = [B - u^{-1}du, u \cdot 0] = [B, 0].$$

En fait, l'ensemble des points de M qui ont un stabilisateur non trivial est $\{[B, 0] \mid B \in \mathcal{A}(Y, \mathfrak{s})\}$. On voudrait remplacer ce sous-ensemble de M par un ensemble de points sur lequel S^1 agit librement.

On munit $\Gamma(S)$ de la norme L^2 et on considère sa complétion que l'on note aussi $\Gamma(S)$. Soit la sphère unité $S(\Gamma(S), L^2) = \{\psi \in \Gamma(S), \|\psi\| = 1\}$. Tout élément de $\Gamma(S)$ s'écrit

alors $r\psi$ pour un réel $r \geq 0$ et un $\psi \in S(\Gamma(S), L^2)$. Cette écriture est unique pour un élément non nul de $\Gamma(S)$. On définit l'éclatement de $\mathcal{A}(Y, \mathfrak{s}) \times \Gamma(S)$ comme étant la variété

$$\mathcal{A}(Y, \mathfrak{s}) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times S(\Gamma(S), L^2).$$

Le groupe $G(Y, \mathfrak{s})$ agit par

$$u(B, r, \psi) = (B - u^{-1}du, r, u\psi)$$

et cette action est libre. L'identification de $\{0\} \times S(\Gamma(S), L^2)$ donne une surjection vers $\mathcal{A}(Y, \mathfrak{s}) \times \Gamma(S)$. On a donc éclaté M en une variété

$$M^\sigma = \left(\mathcal{A}(Y, \mathfrak{s}) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times S(\Gamma(S), L^2) \right) / G_0(Y, \mathfrak{s})$$

sur laquelle S^1 agit librement. On pose

$$B^\sigma = M^\sigma / S^1 = \left(\mathcal{A}(Y, \mathfrak{s}) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times S(\Gamma(S), L^2) \right) / G(Y, \mathfrak{s}),$$

qui est variété topologique par le théorème de variété quotient.

7.6 Champ de vecteurs éclaté

On modifie le champ de vecteurs $-\nabla L$ pour obtenir un champ de vecteurs sur $\mathcal{A}(Y, \mathfrak{s}) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times S(\Gamma(S), L^2)$

$$(-\nabla L)^\sigma(B, r, \psi) = \left(F_{B^t} - \rho^{-1}(2r\psi \otimes r\psi^* + |r\psi|^2 I), \langle \psi, D_B(\psi) \rangle \cdot r, D_B(\psi) - \langle \psi, D_B(\psi) \rangle \cdot \psi \right),$$

où le produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est induit par la norme L^2 . Remarquons que $\langle \psi, D_B(\psi) \rangle$ est réel et possède des valeurs propres réelles car l'opérateur de Dirac D_B est autoadjoint (Friedrich, 2000, Prop., p. 96). De plus, $(-\nabla L)^\sigma$ est $G(Y, \mathfrak{s})$ -invariant car

$$\langle u\psi, D_B(u\psi) \rangle = \langle u\psi, uD_B(\psi) \rangle = u\bar{u}\langle \psi, D_B(\psi) \rangle = \langle \psi, D_B(\psi) \rangle,$$

ce qui définit un champ de vecteurs $[(-\nabla L)^\sigma]$ sur B^σ .

La théorie de Morse appliquée à B^σ avec $[(-\nabla L)^\sigma]$ permet d'étudier M car les points critiques des champs de vecteurs $[(-\nabla L)^\sigma]$ et $[(-\nabla L)]$ sont reliés par le lemme suivant.

Lemme 7.6.1. 1. Si $r \neq 0$, $[B, r, \psi]$ est point critique de $[(-\nabla L)^\sigma]$ si et seulement si $[B, r\psi]$ est point critique de $[(-\nabla L)]$.

2. Si $r = 0$, $[B, 0, \psi]$ est point critique de $[(-\nabla L)^\sigma]$ si et seulement si $[B, 0]$ est point critique de $[(-\nabla L)]$ et ψ est vecteur propre de D_B .

Démonstration. Soit $[B, r, \psi]$ point critique de $[(-\nabla L)^\sigma]$. Les deux champs de vecteurs ayant une première composante identique, il suffit de vérifier que $D_B(r\psi) = 0$. Supposons que $r \neq 0$. Alors $\langle \psi, D_B(\psi) \rangle = 0$. Il s'ensuit que $0 = D_B(\psi) - \langle \psi, D_B(\psi) \rangle \cdot \psi = D_B(\psi)$, d'où $D_B(r\psi) = rD_B(\psi) = 0$. Supposons que $r = 0$. Alors $D_B(r\psi) = rD_B(\psi) = 0$.

Réciproquement, si $[B, r\psi]$ est point critique de $[(-\nabla L)]$, on a $0 = D_B(r\psi) = rD_B(\psi)$. Supposons que $r \neq 0$. Alors $D_B(\psi) = 0$ et $(-\nabla L)^\sigma(B, r, \psi) = 0$. Supposons que $r = 0$ et soit $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ valeur propre associée à ψ . Alors

$$D_B(\psi) - \langle \psi, D_B(\psi) \rangle \cdot \psi = \lambda\psi - \langle \psi, \lambda\psi \rangle \psi = \lambda\psi - \lambda\langle \psi, \psi \rangle \psi = 0. \quad \square$$

7.7 Complexes de chaînes

7.7.1 Groupes de chaînes

La variété B^σ a comme bord $\partial B^\sigma = \{[B, r, 0] \mid r = 0\}$. On veut lui définir un analogue à l'homologie de Morse pour une variété avec bord en considérant le champ de vecteurs $[(-\nabla L)^\sigma]$. On peut garantir la transversalité des variétés stables et instables en perturbant L en lui additionnant une fonction $G(Y, \mathfrak{s})$ -invariante (Kronheimer et Mrowka, 2007 Prop. 12.2.5). Une telle perturbation permet aussi de donner un analogue de la non-dégénérescence des points critiques (Kronheimer et Mrowka, 2007 chap. IV). Ces derniers n'ont pas de Hessienne associée car $[(-\nabla L)^\sigma]$ n'est pas gradient d'une fonction de Morse à proprement parler ; on peut en définir un analogue en prenant la dérivée du

champ de vecteurs $[(-\nabla L)^\sigma]$ (une Hessienne étant la dérivée du gradient d'une fonction). Lorsque cet analogue est un isomorphisme en un point critique, ce dernier est alors non dégénéré ; il en découle aussi que les points critiques non dégénérés sont isolés dans B^σ (Kronheimer et Mrowka, 2007, p. 205).

Définition 7.7.1. Un point critique $[B, r, \psi] \in \text{int } B^\sigma$ est dit *irréductible* (en particulier car $r\psi \neq 0$). Un point critique $[B, 0, \psi] \in \partial B^\sigma$ est dit *stable* si ψ est associé à une valeur propre positive de D_B et *instable* si ψ est associé à une valeur propre négative de D_B .

Un point critique réductible $[B, 0, \psi]$ est non dégénéré si et seulement si l'opérateur D_B , dont le spectre est discret pour Y compact (Friedrich, 2000, p. 99), n'a pas zéro comme valeur propre et ses espaces propres sont de dimension 1 (Kronheimer et Mrowka, 2007 Prop. 12.2.5).

On considère les modules suivants

$$C^o = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{points critiques irréductibles} \rangle$$

$$C^s = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{points critiques stables} \rangle$$

$$C^u = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{points critiques instables} \rangle$$

et on pose

$$\check{C} = C^o \oplus C^s$$

$$\hat{C} = C^o \oplus C^u$$

$$\bar{C} = C^s \oplus C^u.$$

7.7.2 Gradation relative

En théorie de Morse appliquée à une variété de dimension finie, les points critiques ont un indice défini comme étant le nombre de valeurs propres négatives de la Hessienne de la fonction de Morse en ce point. Ici, notre variété B^σ est de dimension infinie : la notion d'indice n'est donc pas forcément bien définie. On peut par contre définir une gradation

relative entre deux points critiques a et b .

Soit $d \geq 0$ générateur de l'image de l'application envoyant $[u] \in H^1(Y, \mathbb{Z})$ à $(c_1(S) \smile [u])[Y] \in \mathbb{Z}$, l'évaluation de la classe fondamentale de Y par le cup-produit $c_1(S) \smile [u]$.

Définition 7.7.2. La *gradation relative* entre les points critiques a et $b \in B^\sigma$ du champ de vecteurs $[(-\nabla L)^\sigma]$ est

$$\text{gr}(a, b) = \begin{cases} \dim M(a, b) - 1 \pmod{d \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} & \text{si } a \text{ stable et } b \text{ instable,} \\ \dim M(a, b) \pmod{d \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $M(a, b)$ est l'espace de modules des trajectoires allant de a à b .

Remarque. Lorsqu'on parle de la dimension d'un espace de modules, on veut en fait parler de sa *dimension formelle*. Cette dernière correspond à l'indice de l'opérateur analogue à la Hessienne (Kronheimer et Mrowka, 2007, Théorème 14.4.2), qui s'avère avoir un noyau et un conoyau de dimensions finies. L'indice est donné par la différence entre ces dimensions. Lorsque $M(a, b)$ est une variété lisse, la dimension formelle correspond à la dimension de la variété.

Dans le cas où $a = [B, 0, \psi]$ et $b = [B, 0, \varphi]$, ces points critiques sont associés à des valeurs propres $\lambda_a < \lambda_b$ de D_B . Soit n le nombre de valeurs propres λ telles que $\lambda_a < \lambda \leq \lambda_b$. On a $\dim M(a, b) = 2n$ (Kronheimer et Mrowka, 2007, section 14.6), de sorte que

$$\text{gr}(a, b) = \begin{cases} 2n - 1 \pmod{d \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} & \text{si } a \text{ stable et } b \text{ instable,} \\ 2n \pmod{d \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le quotient par d donne la $G(Y, \mathfrak{s})$ -invariance de cette gradation sur B^σ car une transformation de jauge $u \in G(Y, \mathfrak{s})$ représente un élément de $[u] \in H^1(Y, \mathbb{Z})$; ce qui fait de $\text{gr}(a, b)$ une valeur bien définie pour $a, b \in B^\sigma$.

7.7.3 Opérateurs de bord

On définit les opérateurs

$$\begin{aligned} \partial_B^A : C^A &\longrightarrow C^B \\ a &\longmapsto \sum_{\substack{b \in C^B \\ \dim M(a,b)=0}} |M(a,b)| \cdot b \end{aligned}$$

pour A parmi o, u et B parmi o, s et

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_B^A : C^A &\longrightarrow C^B \\ a &\longmapsto \sum_{\substack{b \in C^B \\ \dim M_\partial(a,b)=0}} |M_\partial(a,b)| \cdot b \end{aligned}$$

pour A, B parmi u et s , où $M_\partial(a,b)$ est l'espace des modules de la restriction de $[(-\nabla L)^\sigma]$ à ∂B^σ .

On pose

$$\check{\partial} = \begin{bmatrix} \partial_o^o & \partial_o^u \bar{\partial}_u^s \\ \partial_s^o & \bar{\partial}_s^s + \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \end{bmatrix}, \quad \hat{\partial} = \begin{bmatrix} \partial_o^o & \partial_o^u \\ \bar{\partial}_u^s \partial_s^o & \bar{\partial}_u^u + \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \end{bmatrix}, \quad \bar{\partial} = \begin{bmatrix} \bar{\partial}_s^s & \bar{\partial}_s^u \\ \bar{\partial}_u^s & \bar{\partial}_u^u \end{bmatrix}$$

Un calcul direct vérifie que $\check{\partial}^2 = \hat{\partial}^2 = \bar{\partial}^2 = 0$. Ceci fait de $(\check{C}, \check{\partial}), (\hat{C}, \hat{\partial}), (\bar{C}, \bar{\partial})$ des complexes de chaînes.

7.8 Homologie de Floer

Définition 7.8.1. Les homologies

$$\widetilde{HM}(Y, \mathfrak{s}), \widehat{HM}(Y, \mathfrak{s}), \overline{HM}(Y, \mathfrak{s})$$

respectivement associées à $(\check{C}, \check{\partial}), (\hat{C}, \hat{\partial}), (\bar{C}, \bar{\partial})$ sont les *groupes d'homologie de Seiberg-Witten-Floer* de la variété (Y, \mathfrak{s}) .

Définition 7.8.2. Les groupes

$$\begin{aligned}\widetilde{HM}(Y) &= \bigoplus_{\mathfrak{s}} \widetilde{HM}(Y, \mathfrak{s}), \\ \widehat{HM}(Y) &= \bigoplus_{\mathfrak{s}} \widehat{HM}(Y, \mathfrak{s}), \\ \overline{HM}(Y) &= \bigoplus_{\mathfrak{s}} \overline{HM}(Y, \mathfrak{s})\end{aligned}$$

sont les *groupes d'homologie de Seiberg-Witten-Floer totaux* de la variété Y .

7.8.1 Structure de module

Le cap-produit en homologie singulière confère aux groupes d'homologie une structure de module sur l'anneau de cohomologie. De façon analogue, les groupes d'homologie de Floer sont des modules pour l'anneau de cohomologie de B^σ . Cette variété est du même type homotopique que $H^1(Y; \mathbb{R})/H^1(Y; \mathbb{Z}) \times \mathbb{C}P^\infty$ et elle a comme cohomologie l'anneau $\bigwedge H^1(Y; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}[U]$ (Kronheimer et Mrowka, 2007, Prop. 9.7.1).

7.8.2 Longue suite exacte

Soient les applications suivantes

$$\begin{aligned}i: \quad \overline{C} &\longrightarrow \check{C} \\ (a, b) &\longmapsto (-\partial_o^u b, a - \partial_s^u b) \\ \\ j: \quad \check{C} &\longrightarrow \widehat{C} \\ (a, b) &\longmapsto (a, -\overline{\partial}_u^s b) \\ \\ p: \quad \widehat{C} &\longrightarrow \overline{C} \\ (a, b) &\longmapsto (\partial_s^o a + \partial_s^u b, b)\end{aligned}$$

qui, par calcul direct, sont des morphismes de chaînes dans le cas de i et j , et antimorphisme de chaînes dans le cas de p (i.e. $p\widehat{\partial} = -\overline{\partial}p$).

Proposition 7.8.3. *Les applications i, j, p induisent une longue suite exacte pour les*

groupes d'homologies de Seiberg-Witten-Floer.

Autrement dit, le triangle suivant est exact.

$$\begin{array}{ccc}
 \widetilde{HM}(Y, \mathfrak{s}) & \xrightarrow{j_*} & \widehat{HM}(Y, \mathfrak{s}) \\
 & \swarrow i_* & \searrow p_* \\
 & \widetilde{HM}(Y, \mathfrak{s}) &
 \end{array}$$

Démonstration. Nous esquissons la démonstration (Kronheimer et Mrowka, 2007, Prop.22.2.1) en donnant les ingrédients principaux. On introduit le groupe auxiliaire $E = \widehat{C} \oplus \overline{C}$ et les applications

$$\begin{aligned}
 e : \quad E &\longrightarrow E \\
 (a, b) &\longmapsto (\widehat{\partial}a, pa + \overline{\partial}b) \\
 \\
 k : \quad \check{C} &\longrightarrow E \\
 (x, y) &\longmapsto (x, -\overline{\partial}_u^s y, y, 0) \\
 \\
 l : \quad E &\longrightarrow \check{C} \\
 (a, b, c, d) &\longmapsto (a - \partial_o^u d, c - \partial_s^u d) \\
 \\
 K : \quad E &\longrightarrow E \\
 (a, b, c, d) &\longmapsto (0, 0, 0, -d)
 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
 e^2(a, b) &= (\widehat{\partial}^2 a, p\widehat{\partial}a + \overline{\partial}(pa + \overline{\partial}b)) \\
 &= (0, p\widehat{\partial}a + \overline{\partial}pa + \overline{\partial}^2 b) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

ce qui fait de (E, e) un complexe de chaînes. La suite exacte courte de complexes $\overline{C} \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} \widehat{C}$, où ι est l'inclusion et π la projection, induit une longue suite en homologie dont l'homomorphisme de connexion est p_* . Cette dernière est isomorphe au triangle de l'énoncé via l'isomorphisme $H(E) \cong \widetilde{HM}(Y, \mathfrak{s})$ donné par $lk = Id_{\check{C}}$ et $kl = Id_E + eK +$

Ke et la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{i_*} & \widetilde{HM}(Y, \mathfrak{s}) & \xrightarrow{j_*} & \widehat{HM}(Y, \mathfrak{s}) & \xrightarrow{p_*} & \overline{HM}(Y, \mathfrak{s}) & \xrightarrow{i_*} & \widetilde{HM}(Y, \mathfrak{s}) & \xrightarrow{j_*} & \cdots \\
& & \downarrow k_* & & \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow k_* & & \\
\cdots & \xrightarrow{\iota_*} & H(E) & \xrightarrow{\pi_*} & \widehat{HM}(Y, \mathfrak{s}) & \xrightarrow{p_*} & \overline{HM}(Y, \mathfrak{s}) & \xrightarrow{\iota_*} & H(E) & \xrightarrow{\pi_*} & \cdots
\end{array}$$

donnée par $j = \pi k$ et $ki = \iota + eK\iota + K\iota\bar{\partial}$. □

7.9 Homologie de Floer de sphères d'homologie

7.9.1 Solutions réductibles

Proposition 7.9.1. *Soit Y une sphère d'homologie de dimension 3. Ses équations de Seiberg-Witten possèdent une unique solution réductible à transformation de jauge près.*

Démonstration. Le groupe de cohomologie $H^2(Y; \mathbb{Z})$ est trivial, donnant une unique structure spin^c \mathfrak{s} associée à la classe de Chern $c_1(S) = 0$. La forme de courbure F_{B^t} pour une connexion B sur le fibré spinoriel S est exacte car la classe de de Rham de $-\frac{1}{2\pi i}F_{B^t}$ est égale à $c_1(S)$. Ainsi, $F_{B^t} = dg$ pour un $g \in \Omega^1(Y, i\mathbb{R})$ et alors

$$F_{(B-g/2)^t} = F_{B^t} - 2dg/2 = dg - dg = 0,$$

ce qui montre l'existence d'une solution réductible $[B - g/2, 0]$.

Si $[B, 0] \in \mathcal{A}(Y, \mathfrak{s}) \times \Gamma(S)$ est une solution aux équations de Seiberg-Witten, alors $F_{B^t} = dB^t = 0$. C'est donc dire que $B^t \in \Omega^1(Y, i\mathbb{R})$ représente une classe de $H^1(Y; i\mathbb{R})$. Or, ce groupe de cohomologie est trivial pour une sphère d'homologie. Par conséquent, pour toute autre solution $[B + b, 0]$, il existe une fonction $f \in C^\infty(Y, \mathbb{R})$ telle que

$$(B + b)^t = B^t + 2b = B^t + idf.$$

Il s'ensuit que $b = idf/2$. En posant $u : Y \rightarrow S^1, x \mapsto e^{if(x)}$, on a

$$u^{-1}du(x) = e^{-if(x)}(idf(x)e^{if(x)}) = idf(x) = b(x).$$

On en conclut que toutes les solutions réductibles sont équivalentes à transformation de jauge près. \square

De plus, cette unique solution réductible est non dégénérée à perturbation près (Kronheimer et Mrowka, 2007, p. 447).

7.9.2 Groupe d'homologie $\overline{HM}(Y)$

Puisque $H^2(Y)$ est trivial, Y est doté d'une unique structure spin^c . Dans l'éclatement B^σ associé à cette structure spin^c , l'unique solution réductible $(B, 0)$ donne lieu à un ensemble de points critiques $\{[B, 0, \psi_n], n \in \mathbb{Z}\}$, indexés de sorte que les valeurs propres λ_n de D_B associées aux ψ_n soient en ordre croissant $\lambda_n < \lambda_{n+1}$. Les espaces de modules entre deux points critiques distincts sont de dimension paire strictement positive : l'opérateur $\bar{\partial}$ est trivial et

$$\overline{HM}(Y) = \overline{HM}(Y, \mathfrak{s}) = \overline{C} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[U^{-1}, U],$$

où U^{-n} représente le point critique associé à la valeur propre λ_n de D_B .

7.9.3 Structure de module

$\overline{HM}(Y)$ est un module pour l'anneau

$$\bigwedge H^1(Y; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}[U] = \{0\} \otimes \mathbb{Z}[U] = \mathbb{Z}[U].$$

Rappelons que $H_k(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ si k est positif et pair, et 0 sinon. Dans l'anneau $H(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[U]$, U^n est associé au générateur de $H_{2n}(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Il s'ensuit que U agit sur $\overline{HM}(Y)$ par $U \cap U^{-n} = U^{-n+1}$, ce qui représente le point critique associé à la valeur propre λ_{n-1} , soit de 2 degrés inférieurs au point critique associé à λ_n . L'action de U abaisse le degré relatif de 2.

7.9.4 Invariant de Frøyshov

Proposition 7.9.2. *Le morphisme p_* du triangle exact de la proposition 7.8.3 n'est ni trivial, ni surjectif pour Y une sphère d'homologie.*

Démonstration. Soit $b \neq 0 \in C^u$. Si p_* est trivial, alors $p_*([0, b]) = [\partial_s^o 0 + \partial_s^u b, b] = [0, b] = 0$ ce qui implique que $(0, b) \in \text{Im } \bar{\partial} = \{0\}$, contredisant $b \neq 0$.

Soit $b \neq 0 \in C^s$. L'image de j_* est composée des classes $[a, 0]$ pour tout $a \in C^o$. Par exactitude, $p_*([a, 0]) = [\partial_s^o a + \partial_s^u 0, 0] = [\partial_s^o a, 0] = 0$ ce qui implique que $\partial_s^o a = 0$ et $\text{Im } \partial_s^o = \{0\}$. Si on suppose que p_* est surjectif, alors i_* trivial par exactitude et on a $i_*([b, 0]) = [-\partial_s^o 0, b - \partial_s^u 0] = [0, b] = 0$ d'où $b \in \text{Im } \partial_s^o = \{0\}$, contredisant $b \neq 0$. \square

Cette proposition garantit que le morphisme p_* du triangle exact donne lieu à un sous-module propre et non trivial $p_*\widehat{HM}(Y)$ dans $\overline{HM}(Y) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[U^{-1}, U]$. Les sous-modules propres non triviaux de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[U^{-1}, U]$ sont de la forme

$$U^{h+1}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[U] = \left\{ \sum_{n=h+1}^{\infty} a_n U^n, a_n = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ pour un nombre fini de } a_n \right\}$$

pour un $h \in \mathbb{Z}$.

Définition 7.9.3. Soit Y une sphère d'homologie. L'invariant de Frøyshov de Y est l'entier $h \in \mathbb{Z}$ tel que

$$p_*\widehat{HM}(Y) = U^{h+1}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[U].$$

L'invariant de Frøyshov est de plus invariant pour les cobordismes d'homologie, ce qui découle du résultat suivant.

Théorème 7.9.4 (Frøyshov, 2010, Théorème 4). *Soient Y, Y' des sphères d'homologies. Soit W un cobordisme allant de Y à Y' dont la forme d'intersection est définie négative.*

On a

$$h(Y) \geq h(Y') + \frac{b_2(W) + c_1(\mathcal{L})^2}{8},$$

où \mathcal{L} est le fibré en droites associé à une structure spin^c sur W et $c_1(\mathcal{L})^2 = (c \smile c)[W, \partial W]$ pour $c \in H^2(W, \partial W; \mathbb{Q})$ dont l'image est $c_1(\mathcal{L})$ dans la longue suite exacte de la paire $(W, \partial W)$ en cohomologie à coefficients rationnels.

Notons que $c_1(\mathcal{L})^2$ est bien définie car Y, Y' étant sphères d'homologie, on a dans la longue suite exacte d'une paire en cohomologie

$$H^1(\partial W) = 0 \longrightarrow H^2(W, \partial W) \xrightarrow{\cong} H^2(W) \longrightarrow H^2(\partial W) = 0.$$

Cet isomorphisme définit aussi la forme d'intersection

$$\begin{aligned} H^2(W, \partial W; \mathbb{Q}) \times H^2(W; \mathbb{Q}) &\cong H^2(W, \partial W; \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q} \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \smile \beta([W, \partial W]) \end{aligned}$$

Proposition 7.9.5. *Soient Y, Y' des sphères d'homologies telles que $[Y] = [Y'] \in \Theta_3^H$. Alors $h(Y) = h(Y')$.*

Démonstration. Soit W cobordisme d'homologie entre Y et Y' . Puisque $H_2(W, Y) = H_2(Y) = 0$, la longue suite exacte en homologie de la paire (W, Y) donne $H_2(W) = 0$. Par dualité de Poincaré, on a $H^2(W) = H_2(W) = 0$. La forme d'intersection est nulle et en particulier définie négative. On applique le théorème pour lequel les termes $b_2(W)$ et $c_1(\mathcal{L})^2$ sont nuls, donnant lieu à l'inégalité $h(Y) \geq h(Y')$. En considérant le cobordisme $-W$ entre Y' et Y , on a toujours une forme d'intersection nulle, donc définie négative. Le théorème donne l'inégalité $h(Y') \geq h(Y)$, d'où l'égalité $h(Y) = h(Y')$. \square

Cet invariant possède la propriété intéressante d'être additif sous la somme connexe.

Proposition 7.9.6 (Frøyshov, 2010, Théorème 3). $h(Y \# Y') = h(Y) + h(Y')$

7.9.5 Gradation absolue

La valeur bien définie $c_1(\mathcal{L})^2$ du théorème permet de graduer de façon absolue chaque point critique d'une sphère d'homologie, donc de voir les groupes d'homologie de Floer comme des $\mathbb{Z}[U]$ -modules gradués.

On considère une variété de dimension 4 qui a Y comme bord. En lui retirant une boule B^4 , on obtient un cobordisme W entre Y et B^4 . On suppose que \mathfrak{t} , la structure spin^c de W , se restreint à celles de Y et S^3 .

La théorie de Seiberg-Witten appliquée à W donne lieu à un espace de solutions éclaté $B^\sigma(W, \mathfrak{t})$ et un champ de vecteurs $[(-\nabla L_W)^\sigma]$ analogue à ceux décrits en dimension 3 (Morgan, 1996). Les éléments de $B^\sigma(W, \mathfrak{t})$ se restreignent à des éléments de $B^\sigma(Y) \times B^\sigma(S^3) \cong B^\sigma(\partial W)$ (Kronheimer et Mrowka, 2007, p. 456). Soit $a_0 = [B, 0, \psi_0]$ le point critique stable de S^3 associé à la plus petite valeur propre positive de D_B . On note $M_W(a_0, a)$ la composante connexe de $z \in B^\sigma(W, \mathfrak{t})$ dont les éléments se restreignent à (a, a_0) .

Définition 7.9.7. Soit Y sphère d'homologie et soit W un cobordisme entre S^3 et Y . Le degré d'un point critique a de Y est

$$\text{gr}(a) = -\dim M_W(a_0, a) + \frac{c_1(\mathcal{L})^2 - 2\chi(W) - 3\sigma(W)}{4},$$

où χ est la caractéristique d'Euler et σ la signature de la forme d'intersection.

Remarque. La valeur $(c_1(\mathcal{L})^2 - 2\chi(W) - 3\sigma(W))/4$ est la dimension de l'espace M_W des solutions aux équations de Seiberg-Witten de dimension 4 à transformation de jauge près si W est une variété fermée (Morgan, 1996, Théorème 6.1.1).

Proposition 7.9.8. La valeur rationnelle $\text{gr}(a)$ est bien définie : elle ne dépend pas du cobordisme W ni du point critique $z \in B^\sigma(W, \mathfrak{t})$.

Démonstration. Soit W' un autre cobordisme entre S^3 et Y et soit $z' \in B^\sigma(W', \mathfrak{t}')$ qui

donne lieu à l'espace de modules $M_{W'}(a_0, a)$. On considère la variété fermée

$$\widetilde{W} = -B^4 \cup_{S^3} W \cup_Y -W' \cup_{S^3} B^4.$$

On prend pour acquis les résultats suivants (Kronheimer et Mrowka, 2007, p. 586) :

1. $\dim M_{B^4}(a_0) = -1$;
2. $\dim M_{B^4}(a_{-1}) = 0$, où a_{-1} est le point critique stable de S^3 associé à la plus grande valeur propre négative de l'opérateur de Dirac.

On concatène les espaces de modules de chaque cobordisme de sorte à considérer la composante connexe d'une solution sur \widetilde{W} se restreignant à (a_0, a, a_0) . Notons que du côté $-B^4$, l'orientation inverse de S^3 fait de a_0 le point critique stable de S^3 associé à la plus grande valeur propre négative de l'opérateur de Dirac. L'espace de modules considéré est $M_{B^4}(a_{-1})$. De façon similaire, dans la partie $-W'$, l'espace de modules considéré est $M_{-W'}(a, a_{-1})$.

On obtient une variété de dimension

$$\dim M_{B^4}(a_{-1}) + \dim M_W(a_0, a) + \dim M_{-W'}(a, a_{-1}) + \dim M_{B^4}(a_0).$$

Puisque les composantes connexes de l'espace de modules d'une variété fermée sont toutes de même dimension, cette somme est égale à

$$\frac{c_1(\mathcal{L}_{\widetilde{W}})^2 - 2\chi(\widetilde{W}) - 3\sigma(\widetilde{W})}{4}.$$

L'additivité de chaque terme pour les cobordismes donne l'égalité entre $\dim M_W(a_0, a) + \dim M_{-W'}(a, a_{-1})$ et

$$\frac{c_1(\mathcal{L}_W)^2 - 2\chi(W) - 3\sigma(W)}{4} + \frac{c_1(\mathcal{L}_{-W'})^2 - 2\chi(-W') - 3\sigma(-W')}{4},$$

où $\dim M_{B^4}(a_{-1}) + \dim M_{B^4}(a_0) = 0 - 1 = -1$ s'annule avec

$$2 \cdot \frac{c_1(\mathcal{L}_{B^4})^2 - 2\chi(B^4) - 3\sigma(B^4)}{4} = 2 \cdot \frac{0 - 2 \cdot 1 - 0}{4} = -1$$

par trivialité de $H^2(B^4, S^3)$.

Soit D' l'opérateur de Dirac associé à une solution sur $-W'$ se restreignant à (a, a_{-1}) . La dimension de $M_{-W'}(a, a_{-1})$ correspond à l'indice $\text{ind } D'$ de cet opérateur additionné à $(-\chi(-W) - \sigma(-W'))/2 = (-\chi(W') + \sigma(W'))/2$ (Kronheimer et Mrowka, 2007, Lemme 25.4.2). En inversant l'orientation, ce même opérateur est associé à la solution sur W' se restreignant à (a_0, a) . Par le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer (Friedrich, 2000, p. 109), il est d'indice $-\text{ind } D'$ lorsqu'appliqué aux sections du fibré spinoriel au-dessus de W' . Alors

$$\begin{aligned} -\dim M_{W'}(a_0, a) &= \text{ind } D' + (\chi(W') + \sigma(W'))/2 \\ &= \dim M_{-W'}(a, a_{-1}) + \chi(W'), \end{aligned}$$

ce qui mène à l'égalité

$$\begin{aligned} \dim M_W(a_0, a) + \dim M_{-W'}(a, a_{-1}) &= \dim M_W(a_0, a) - \dim M_{W'}(a_0, a) - \chi(W') \\ &= \frac{c_1(\mathcal{L}_W)^2 - 2\chi(W) - 3\sigma(W)}{4} + \frac{c_1(\mathcal{L}_{-W'})^2 - 2\chi(-W') - 3\sigma(-W')}{4} \\ &= \frac{c_1(\mathcal{L}_W)^2 - 2\chi(W) - 3\sigma(W)}{4} + \frac{-c_1(\mathcal{L}_{W'})^2 - 2\chi(W') + 3\sigma(W')}{4}. \end{aligned}$$

En réarrangeant les termes, on obtient l'égalité voulue entre

$$-\dim M_W(a_0, a) + \frac{c_1(\mathcal{L}_W)^2 - 2\chi(W) - 3\sigma(W)}{4}$$

et

$$-\dim M_{W'}(a_0, a) + \frac{c_1(\mathcal{L}_{W'})^2 - 2\chi(W') - 3\sigma(W')}{4}. \quad \square$$

7.10 Homologie de Floer de la sphère

7.10.1 Solutions irréductibles

On utilise le fait que la sphère S^3 admet une métrique à courbure scalaire s partout positive et donc constante en tout point (Kobayashi et Nomizu, 1963, Note 3, Théorème 1). La formule de Lichnerowicz–Weitzenböck (Kronheimer et Mrowka, 2007, p. 93) met

en relation les ingrédients des équations de Seiberg-Witten et la courbure scalaire :

$$D_B(\psi)^2 = \nabla_B^* \nabla_B \psi + \rho F_{B^t}(\psi)/2 + s\psi/4.$$

Dans $\Gamma(S)$ muni de la norme L^2 , si ψ est solution aux équations de Seiberg-Witten, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla_B^* \nabla_B \psi, \psi \rangle + \langle 2\psi \otimes \psi^*(\psi) - |\psi|I_2(\psi), \psi \rangle/2 + \langle s\psi, \psi \rangle \\ &= \langle \nabla_B \psi, \nabla_B \psi \rangle + |\psi|^2 \langle \psi, \psi \rangle - |\psi|^2 \langle \psi, \psi \rangle/2 + s \langle \psi, \psi \rangle \\ &= \langle \nabla_B \psi, \nabla_B \psi \rangle + |\psi|^2 \langle \psi, \psi \rangle/2 + s \langle \psi, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Les termes étant tous positifs ou nuls, leur somme est nulle seulement s'ils sont tous nuls. Il s'ensuit que $\psi = 0$. La sphère ne possède donc pas de solution irréductible aux équations de Seiberg-Witten.

7.10.2 Groupes d'homologie $\widetilde{HM}(S^3)$ et $\widehat{HM}(S^3)$

Les générateurs des groupes de chaînes $\check{C}(S^3)$ et $\hat{C}(S^3)$ sont respectivement les solutions réductibles stables et instables. Puisque les espaces de modules entre deux points critiques distincts sont de dimension paire strictement positive, les opérateurs de bords sont triviaux. Les groupes d'homologie de Floer associés à ces complexes sont

$$\begin{aligned} \widetilde{HM}(S^3) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[U^{-1}, U]/U\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[U] \\ \widehat{HM}(S^3) &= U\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[U] \end{aligned}$$

où les puissances de U tiennent compte de l'action de U par rapport au degré absolu tel que décrit ci-après.

7.10.3 Gradation absolue

On calcule le degré des points critiques de S^3 en employant la stratégie utilisée pour montrer la bonne définition du degré absolu.

Considérons le cobordisme $S^3 \times I$ de S^3 à S^3 . En collant des B^4 à chaque extrémité S^3 , on obtient une sphère S^4 . Alors

$$\begin{aligned} \dim M(a_0, a_0) &= \frac{c_1(\mathcal{L}_{S^4}) - 2\chi(S^4) + 3\sigma(S^4)}{4} - \dim M_{B^4}(a_0) - \dim M_{B^4}(a_{-1}) \\ &= \frac{0 - 2 \cdot 2 + 0}{4} - (-1) - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \dim M(a_0, a_{-1}) &= \frac{c_1(\mathcal{L}_{S^4}) - 2\chi(S^4) + 3\sigma(S^4)}{4} - \dim M_{B^4}(a_{-1}) - \dim M_{B^4}(a_{-1}) \\ &= \frac{0 - 2 \cdot 2 + 0}{4} - 0 - 0 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Avec $H^2(S^3 \times I) = 0$ et $\chi(S^3 \times I) = \chi(S^3)\chi(I) = 0$, on obtient $\text{gr}(a_0) = 0$ et $\text{gr}(a_{-1}) = -1$.

Dans $\widehat{HM}(S^3)$, le point critique a_0 de degré 0 est associé à U^0 et un point a_n de degré $2n$ est associé à U^{-n} .

Dans $\widehat{HM}(S^3)$, le point critique a_{-1} de degré -1 est associé à U^1 et un point a_{-n} de degré $-2n + 1$ est associé à U^n .

7.10.4 Invariant de Frøyshov

Le triangle exact donne lieu à une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow U\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[U] \xrightarrow{p_*} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[U^{-1}, U] \xrightarrow{i_*} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[U^{-1}, U]/U\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[U] \longrightarrow 0.$$

On en déduit que l'invariant de Frøyshov pour la sphère est $h(S^3) = 0$.

7.11 Vers l'invariant de Manolescu

Soit Y une sphère d'homologie. Y étant cobordante à elle-même via $Y \times I$, on a $[-Y \# Y] = [S^3]$ dans le groupe de cobordisme d'homologie. Par additivité de l'invariant de Frøyshov,

$$0 = h(S^3) = h(-Y \# Y) = h(-Y) + h(Y)$$

si bien que l'invariant est antisymétrique pour l'orientation inverse.

Proposition 7.11.1. $h(-Y) = -h(Y)$.

Si Y est une sphère d'homologie d'ordre 2 dans le groupe de cobordismes d'homologie, alors $[Y] = [-Y]$ et son invariant de Frøyshov est nul car

$$-h(Y) = h(-Y) = h(Y).$$

On souhaiterait que l'invariant $h(Y)$ soit un relèvement de l'invariant de Rokhlin, mais il ne l'est pas tout à fait.

L'hypothèse de Galewski-Stern et Matumoto sera contredite si on trouve un invariant qui non seulement possède la propriété d'antisymétrie de l'invariant de Frøyshov, mais qui est aussi égal à l'invariant de Rokhlin modulo 2. En effet, on aurait forcément qu'une sphère d'homologie d'ordre 2 ne peut avoir un invariant de Rokhlin égal à 1.

C'est ce que Ciprian Manolescu parvient à faire en développant l'homologie de Floer $\text{Pin}(2)$ -équivariante, que nous décrivons au prochain chapitre.

CHAPITRE VIII

HOMOLOGIE DE FLOER $\text{Pin}(2)$ -ÉQUIVARIANTE

Dans ce chapitre, nous décrivons la version $\text{Pin}(2)$ -équivariante de l'homologie de Floer d'une sphère d'homologie, développée pour la première fois par Ciprian Manolescu (Manolescu, 2015). C'est en utilisant la théorie de l'indice de Conley et les homologies de Borel et de Tate qu'il parvient à extraire des invariants permettant d'étudier le groupe de cobordimes d'homologie. Nous suivons ici l'approche de Francesco Lin (Lin, 2018) qui se base sur l'homologie de Seiberg-Witten-Floer que nous avons présentée dans le chapitre précédent. Bien que nous ne traiterons que du cas particulier des sphères d'homologie, la construction de Lin a l'avantage d'être généralisée à toute variété de dimension trois.

8.1 Équivariance $\text{Pin}(2)$

8.1.1 Groupe $\text{Pin}(2)$

Au chapitre précédent, la construction des groupes d'homologie de Floer se basait sur l'action de S^1 sur B^σ via le groupe de jauge. On revisite le groupe $\text{Pin}(2)$ présenté au chapitre 6 pour lequel on définira une action sur B^σ .

L'algèbre de Clifford C_2 (Section 6.1) est isomorphe aux quaternions \mathbb{H} par l'identifica-

tion suivante, où e_1, e_2 est base orthonormée de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} \varphi : C_2 &\rightarrow \mathbb{H} \\ 1 &\mapsto 1 \\ e_1 &\mapsto j \\ e_2 &\mapsto -k \\ e_1 \otimes e_2 &\mapsto i \end{aligned}$$

Cet isomorphisme φ nous donne une autre description du groupe $\text{Pin}(2)$, équivalente à celle de la définition 6.1.1, mais qui sera plus utile dans le contexte qui nous intéresse.

Définition 8.1.1. Le groupe $\text{Pin}(2)$ est le sous-groupe des quaternions

$$\text{Pin}(2) = S^1 \cup jS^1 = \{a + bi, aj + bk \in \mathbb{H} \mid a^2 + b^2 = 1\}.$$

Proposition 8.1.2. Les groupes $\text{Pin}(2)$ de la définition 6.1.1 et de la définition 8.1.1 sont isomorphes.

Démonstration. Il suffit de montrer que l'isomorphisme $\varphi : C_2 \rightarrow \mathbb{H}$ se restreint à un isomorphisme pour les sous-groupes $\text{Pin}(2)$ tels que définis en 6.1.1 et 8.1.1.

D'abord, la restriction de φ est bien définie car $\varphi(ae_1 + be_2) = aj - bk \in jS^1$ et

$$\begin{aligned} \varphi(ae_1 + be_2 \otimes ce_1 + de_2) &= \varphi(-ac - bd + (ad - bc)e_1 \otimes e_2) \\ &= -ac - bd + (ad - bc)i \in S^1 \\ &= (aj - kb)(cj - kd) \\ &= \varphi(ae_1 + be_2)\varphi(ce_1 + de_2). \end{aligned}$$

Ensuite, elle est surjective, car pour $a + bi \in S^1$, on a $\varphi(ae_1 - be_2 \otimes -e_1) = \varphi(a + be_1 \otimes e_2) = a + bi$, et pour $aj + bk \in jS^1$, on a $\varphi(ae_1 - be_2) = aj + bk$.

Finalement, elle est injective, car les éléments de $\text{Pin}(2) \subset C_2$ sont soit de la forme $ae_1 + be_2$, soit de la forme $a + be_1 \otimes e_2$. \square

8.1.2 Action de $\text{Pin}(2)$

Le fibré spinoriel S d'une variété Y de dimension 3 a comme fibre l'espace vectoriel \mathbb{C}^2 . En considérant la multiplication scalaire de \mathbb{C} à droite sur \mathbb{H} , on a un isomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{H} \cong \mathbb{C} \oplus j\mathbb{C} \\ (a + bi, c + di) &\mapsto a + bi + cj - dk \end{aligned}$$

Ce dernier permet de définir une action du quaternion $j \in \mathbb{H}$ sur S (et donc sur $\Gamma(S)$) par multiplication à droite sur \mathbb{H} ; c'est-à-dire

$$j \cdot (a + bi, c + di) = (-c + di, a - bi),$$

ou encore

$$j \cdot (z, w) = (-\bar{w}, \bar{z}).$$

On note que j^2 est la multiplication par -1 . Aussi, $j^{-1}ij = -i$, ce qui confère une structure quaternionique à l'espace vectoriel \mathbb{C}^2 , et donc une structure quaternionique à S .

Cette action s'étend à une action à droite de $\text{Pin}(2)$: soit $u \in S^1$, alors $u \cdot (a + bi, c + di) = u(a + bi, c + di)$, la multiplication scalaire, et $ju \cdot (a + bi, c + di) = u(j \cdot (a + bi, c + di))$, l'action de j suivie de la multiplication scalaire par u .

Sur l'espace des connexions $\mathcal{A}(Y)$, on a une action de j donnée par

$$j \cdot B = \bar{B}$$

où \bar{B} est la connexion induite par B sur le fibré \bar{S} , conjugué complexe de S (Kobayashi, 1987, Section 1.5, p. 16). Ici aussi, l'action s'étend à une action de $\text{Pin}(2)$ par $u \cdot B = B - u^{-1}du$ et $ju \cdot B = \bar{B} - u^{-1}du$ pour un $u \in S^1$.

8.1.3 Structures spin^c autoconjuguées

L'action de $\text{Pin}(2)$ revêt un intérêt particulier lorsque la structure spin^c sur Y est *autoconjuguée*.

Définition 8.1.3. Une structure spin^c sur une variété Y de dimension 3 est *autoconjuguée* lorsque son fibré spinoriel S est isomorphe au fibré conjugué \bar{S} via l'application $(z, w) \rightarrow (\bar{z}, \bar{w})$.

Ainsi, l'action $j \cdot B = \bar{B}$ est une action sur $\mathcal{A}(Y, \mathfrak{s})$ et elle en induit une sur B^σ .

Sur B^σ , $\text{Pin}(2)$ n'agit que via j , puisque B^σ est obtenu en quotientant par l'action de S^1 : pour $u \in S^1$, on a $u \cdot [B, r, \psi] = [B, r, \psi]$ et

$$ju \cdot [B, r, \psi] = j \cdot [B, r, \psi] = [\bar{B}, r, j \cdot \psi].$$

Cette action est une involution : en effet, $j^2 \cdot [B, r, \psi] = [B, r, -\psi]$ et pour $-1 \in S^1$, on a

$$-1 \cdot (B, r, \psi) = (B - (-1)^{-1}d(-1), r, -\psi) = (B, r, -\psi),$$

ce qui résulte en l'égalité $[B, r, \psi] = [B, r, -\psi]$.

Elle est de plus libre, car $[B, r, \psi] = [\bar{B}, r, j \cdot \psi]$ implique qu'il existe $u \in S^1$ tel que $u\psi = \psi j$, ce qui est absurde car $u \neq j$.

Proposition 8.1.4. *Toute variété de dimension 3 possède une structure spin^c autoconjuguée.*

Démonstration. On considère le fibré produit $S = Y \times \mathbb{C}^2$, qui est isomorphe à son conjugué \bar{S} puisqu'il est obtenu en complexifiant le fibré réel $Y \times \mathbb{R}^2$ (Milnor et Stasheff, 1974, Lemme 15.1). Il suffit de poser (Kronheimer et Mrowka, 2007, Section 1.1)

$$\begin{aligned} \rho_y : T_y Y \cong \mathbb{R}^3 &\rightarrow \text{Hom}(S_y, S_y) \\ e_i &\mapsto \sigma_i \end{aligned}$$

où $e_i, i = 1, 2, 3$, proviennent d'une section du fibré des bases orientées de la trivialisaton $TY \cong Y \times \mathbb{R}^3$ et $\sigma_i, i = 1, 2, 3$, sont telles que données en définition 6.4.4. Ayant muni S de la représentation ρ , on obtient une structure spin^c autoconjuguée sur Y . \square

Proposition 8.1.5. *Toute structure spin^c autoconjuguée sur une variété Y de dimension 3 provient d'une structure spin .*

Démonstration. Étant donné une structure spin P_{Spin} sur M , on obtient une structure spin^c en formant le fibré

$$P_{\text{Spin}^c} = P_{\text{Spin}} \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} S^1.$$

Une telle structure spin^c est toujours autoconjuguée (Morgan, 1996, p. 100). Les structures spin sont identifiées aux éléments de $H^1(Y; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^1(Y; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\beta} & H^2(Y; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cdot 2} & H^2(Y; \mathbb{Z}) \\ \cong \uparrow & & \uparrow & & \\ \{P_{\text{Spin}}\} & \xrightarrow{\times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} S^1} & \{P_{\text{Spin}^c}\} & & \end{array}$$

où la ligne du haut provient de la suite de Bockstein (Gompf, 1997, Remarque (c), p. 49). Il s'ensuit que le nombre de structures spin^c provenant de structures spin est égal au nombre d'éléments dans $\text{im } \beta = \ker(\cdot 2)$, c'est-à-dire le nombre d'éléments d'ordre 2 de $H^2(Y; \mathbb{Z})$.

D'autre part, à partir du fibré autoconjugué $S_0 = Y \times \mathbb{C}^2$, on obtient des fibrés autoconjugués S en tensorisant avec des fibrés en droites autoconjugués L

$$S = S_0 \otimes_{\mathbb{C}} L.$$

Ces fibrés L sont caractérisés par la propriété $c_1(\bar{L}) = c_1(L) = -c_1(L)$ (Milnor et Stasheff, 1974, Lemme 14.9). Il existe autant de structures spin^c autoconjuguées que d'éléments $c_1(L)$ d'ordre 2 dans $H^2(Y; \mathbb{Z})$.

Ainsi, le nombre de structures spin^c autoconjuguées coïncide avec le nombre de structures spin^c obtenues à partir de structures spin . En conclusion, toute structure spin^c

autoconjuguée est obtenue à partir d'une structure spin. \square

8.1.4 Espaces propres de l'opérateur de Dirac

Soit Y munie d'une structure spin^c autoconjuguée. Selon le point de vue de la définition 6.4.2 d'une structure spin^c , une connexion sur S est induite par la connexion de Levi-Civita sur TY et une connexion sur le fibré en droites associé à S (Friedrich, 2000, Chapitre 3). En prenant cette dernière comme étant la connexion invariante pour la conjugaison complexe, on obtient une connexion B_0 sur S invariante sous l'action de j .

Tel que démontré à la section 7.1, toute autre connexion spin^c s'écrit $B_0 + b$ pour un $b \in \Omega^1(Y, i\mathbb{R})$. Il en découle que $j \cdot (B_0 + b) = \overline{B_0 + b} = B_0 - b$. On en déduit le lemme suivant :

Lemme 8.1.6. *On a l'égalité $D_{B_0+b}(j \cdot \psi) = j \cdot D_{j \cdot (B_0+b)}(\psi)$.*

Démonstration. Pour une base locale $\{e_l, 1 \leq l \leq 3\}$, posons $b(e_l) = i\lambda_l, \lambda_l \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
D_{B_0+b}(j \cdot \psi) &= \sum_l \rho(e_l) (\nabla_{B_0+b}^{e_l})(\psi j) \\
&= \sum_l \rho(e_l) (\nabla_{B_0}^{e_l} + b(e_l))(\psi j) \\
&= \sum_l \rho(e_l) \nabla_{B_0}^{e_l}(\psi j) + \psi j i \lambda_l \\
&= \sum_l \rho(e_l) \nabla_{B_0}^{e_l}(\psi) j - \psi i \lambda_l j \\
&= \left(\sum_l \rho(e_l) \nabla_{B_0}^{e_l}(\psi) - \psi i \lambda_l \right) j \\
&= \left(\sum_l \rho(e_l) (\nabla_{B_0}^{e_l} - b(e_l))(\psi) \right) j \\
&= j \cdot D_{j \cdot (B_0+b)}(\psi)
\end{aligned}$$

où la troisième ligne est obtenue par multiplication scalaire donnée à droite sur \mathbb{H} et la quatrième ligne est obtenue par invariance pour la conjugaison de B_0 et $j i = -i j$. \square

Considérons une connexion équivalente à son conjugué à jauge près ; c'est-à-dire $j \cdot B = u \cdot B$ pour un $u \in S^1$. Posons $j' = ju^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned}
D_B(j' \cdot \psi) &= D_B(ju^{-1} \cdot \psi) \\
&= D_{u^{-1}u \cdot B}(u^{-1}\psi j) \\
&= u^{-1}D_{u \cdot B}(\psi j) \\
&= u^{-1}D_{j \cdot B}(\psi j) \\
&= u^{-1}j \cdot D_B(\psi), \text{ par le lemme précédent} \\
&= j' \cdot D_B(\psi).
\end{aligned}$$

Proposition 8.1.7. *Si une connexion spin^c B est équivalente à jauge près à son conjugué, alors les espaces propres de D_B ont une structure quaternionique. En particulier, les espaces propres sont de dimension complexe paire.*

Démonstration. Pour $u^{-1} = a + ib \in S^1$, j' est une structure quaternionique car

$$ju^{-1}ju^{-1} = j(a + ib)j(a + ib) = (ja - kb)(ja - kb) = -a^2 - b^2 = -|u| = -1.$$

Ensuite, j' et i anticommulent car $ij' = iju^{-1} = -ju^{-1}i = -j'i$.

Nous avons montré ci-haut que D_B est linéaire en j' . Étant aussi linéaire en i , il l'est donc sur les quaternions de base $1, i, j', ij'$. Ceci implique que pour un vecteur propre associé à une valeur propre λ , les vecteurs propres $i\psi, j'\psi, ij'\psi$ sont aussi associés à λ . Ceci confère à l'espace propre associé à λ une structure d'espace vectoriel quaternionique.

Un \mathbb{H} -espace vectoriel est de dimension complexe paire. □

8.1.5 Équations de Seiberg-Witten

On rappelle que les équations de Seiberg-Witten donnent lieu au champ de vecteurs

$$(-\nabla L)^\sigma(B, r, \psi) = \left(F_{Bt} - \rho^{-1}(2r\psi \otimes r\psi^* + |r\psi|^2 I), \langle \psi, D_B(\psi) \rangle \cdot r, D_B(\psi) - \langle \psi, D_B(\psi) \rangle \cdot \psi \right)$$

sur B^σ .

Proposition 8.1.8. *Soit Y une variété de dimension 3 munie d'une structure spin^c autoconjuguée. Le champ de vecteurs $(-\nabla L)^\sigma$ est $\text{Pin}(2)$ -équivariant.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $(-\nabla L)^\sigma$ est j -équivariant, puisque l'action de S^1 est quotientée sur B^σ .

D'abord, fixons une connexion B_0 telle que décrite en début de section . Soit $(B_0 + b, r, \psi) \in B^\sigma$.

Montrons l'équivariance de la première coordonnée de $(-\nabla L)^\sigma$.

On a $F_{j \cdot (B_0 + b)^t} = F_{B_0^t} - F_{2b} = j \cdot (F_{B_0^t} + F_{2b}) = j \cdot (F_{(B_0 + b)^t})$, car $F_{2b} = 2db \in \Omega^2(Y, i\mathbb{R})$.

Pour le terme $-\rho^{-1}(2r\psi \otimes r\psi^* + |r\psi|^2 I)$, posons $\psi = ze_1 + we_2$ en coordonnées locales.

Alors

$$2r\psi \otimes r\psi^* - |r\psi|^2 I = 2 \begin{pmatrix} \frac{|z|^2 - |w|^2}{2} & z\bar{w} \\ \bar{z}w & \frac{-|z|^2 + |w|^2}{2} \end{pmatrix},$$

si bien que

$$\begin{aligned} 2r(j \cdot \psi) \otimes r(j \cdot \psi^*) - |r(j \cdot \psi)|^2 I &= 2 \begin{pmatrix} \frac{|w|^2 - |z|^2}{2} & -\bar{w}z \\ -w\bar{z} & \frac{-|w|^2 + |z|^2}{2} \end{pmatrix} \\ &= -(2r\psi \otimes r\psi^* - |r\psi|^2 I). \end{aligned}$$

La matrice $2r\psi \otimes r\psi^* - |r\psi|^2 I$ étant de trace nulle, elle est identifiée par ρ^{-1} à une 2-forme à valeurs dans $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (Morgan, 1996, p. 56). Ceci mène à l'équivariance

$$\begin{aligned} \rho^{-1}(2r(j \cdot \psi) \otimes r(j \cdot \psi^*) - |r(j \cdot \psi)|^2 I) &= -\rho^{-1}(2r\psi \otimes r\psi^* - |r\psi|^2 I) \\ &= j \cdot \rho^{-1}(2r\psi \otimes r\psi^* - |r\psi|^2 I). \end{aligned}$$

Pour les deux autres coordonnées de $(-\nabla L)^\sigma$, l'équivariance découle de la conjugaison du produit hermitien sur \mathbb{C}^2 induite par l'action de j . En effet,

$$\langle j \cdot (z_1, w_1), j \cdot (z_2, w_2) \rangle = \langle (-\bar{w}_1, \bar{z}_1), (-\bar{w}_2, \bar{z}_2) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= -\overline{w_1} \cdot -w_2 + \overline{z_1} z_2 \\
&= \overline{\langle (z_1, w_1), (z_2, w_2) \rangle}
\end{aligned}$$

et puisque D_B est autoadjoint,

$$\langle j \cdot \psi, j \cdot D_B(\psi) \rangle = \int_Y \overline{\langle \psi, D_B(\psi) \rangle} d\mu = \int_Y \langle \psi, D_B(\psi) \rangle d\mu = \langle \psi, D_B(\psi) \rangle.$$

Il s'ensuit que $\langle j \cdot \psi, j \cdot D_B(\psi) \rangle \cdot r = \langle \psi, D_B(\psi) \rangle \cdot r$ et

$$\begin{aligned}
D_B(j \cdot \psi) - \langle j \cdot \psi, j \cdot D_B(\psi) \rangle \cdot (j \cdot \psi) &= j \cdot D_B(\psi) - \langle \psi, D_B(\psi) \rangle \cdot (j \cdot \psi) \\
&= j \cdot (D_B(\psi) - \langle \psi, D_B(\psi) \rangle \cdot \psi). \quad \square
\end{aligned}$$

Le corollaire suivant découle immédiatement de la proposition.

Corollaire 8.1.9. *Si $[B, r, \psi]$ est un point critique de $(-\nabla L)^\sigma$, alors $j \cdot [B, r, \psi]$ est aussi un point critique.*

8.2 Théorie de Morse-Bott

8.2.1 Groupes de chaînes

L'opérateur de Dirac D_B étant linéaire sur les quaternions, la dimension complexe de ses espaces propres est paire. Il s'ensuit que les points critiques $[B, r, \psi] \in B^\sigma$ ne sont pas isolés et sont donc dégénérés (Section 7.7.1). Il faut donc adapter notre construction de l'homologie de Floer de Y . C'est ce que la théorie de Morse-Bott, qui généralise la théorie de Morse, nous permet de faire en considérant des *variétés critiques*. Comme dans le traitement de l'homologie de Seiberg-Witten-Floer (Section 7.7.1), on peut garantir la transversalité des variétés stables et instables émanant des variétés critiques en perturbant le champ de vecteurs $(-\nabla L)^\sigma$ (Lin, 2018, p. 31).

Les groupes de chaînes \widehat{C}, \check{C} et \overline{C} ont comme générateurs des applications continues de *variétés stratifiées* (décrites plus bas) vers les variétés critiques, selon que ces der-

nières soit stables, instables ou irréductibles, de façon analogue à l'homologie de Seiberg-Witten-Floer obtenue avec la théorie de Morse standard ; c'est-à-dire qu'en posant

$$\begin{aligned} C^o &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\{\Delta \xrightarrow{f} \mathcal{C}, \mathcal{C} \text{ irréductibles}\}\rangle \\ C^s &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\{\Delta \xrightarrow{f} \mathcal{C}, \mathcal{C} \text{ stable}\}\rangle \\ C^u &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle\{\Delta \xrightarrow{f} \mathcal{C}, \mathcal{C} \text{ instable}\}\rangle, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \check{C} &= C^o \oplus C^s \\ \hat{C} &= C^o \oplus C^u \\ \bar{C} &= C^s \oplus C^u. \end{aligned}$$

Les applications génératrices $\Delta \xrightarrow{f} \mathcal{C}$ respectent certaines conditions (Lin, 2018, Section 3.1), dont notamment la stratification des variétés Δ et la transversalité des f par rapport aux applications

$$\begin{aligned} M(\mathcal{C}, \mathcal{C}') &\longrightarrow \mathcal{C} \\ \gamma(t) &\longmapsto \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) \end{aligned}$$

pour toutes variétés critiques $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$, où $M(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ est l'espace de modules des trajectoires allant de \mathcal{C} à \mathcal{C}' .

Les variétés Δ sont *stratifiées* dans le sens où il existe des sous-variétés N^i , $-1 \leq i \leq \dim \Delta$ telles que

$$\Delta = N^{\dim \Delta} \supset N^{\dim \Delta - 1} \supset \dots \supset N^1 \supset N^0 \supset N^{-1} = \emptyset.$$

Elles respectent de plus une condition combinatoire généralisant la notion de simplexe : une strate N^i est obtenue de N^{i-1} en ajoutant des *faces* de dimension i , c'est-à-dire

$$N^i \setminus N^{i-1} = \bigsqcup M^i$$

et chaque face M^i est soit contenue dans aucune face M^{i+2} , soit dans une face M^{i+2} et exactement deux faces M_1^{i+1}, M_2^{i+1} de M^{i+2} .

Les applications sont considérées à quotient près pour la relation

$$(\Delta \xrightarrow{f} \mathcal{C}) + (\Delta' \xrightarrow{f'} \mathcal{C}) \sim (\Delta \sqcup \Delta' \xrightarrow{f \sqcup f'} \mathcal{C})$$

et ne sont pas *négligeables*.

Définition 8.2.1. Une application $\Delta \xrightarrow{f} \mathcal{C}$ est *négligeable* s'il existe

1. $\Delta' \xrightarrow{f'} \mathcal{C}$ telle que $\dim \Delta < \dim \Delta'$ et $f(\Delta) \subset f'(\Delta')$
2. $\Delta'' \xrightarrow{f''} \mathcal{C}$ telle que $\dim \Delta - 1 < \dim \Delta''$ et $f(M^{\dim \Delta - 1}) \subset f''(\Delta'')$ pour toute face $M^{\dim \Delta - 1}$ de Δ .

On remarque que si toutes les variétés critiques sont de dimension nulle (donc des points), les groupes de chaînes obtenus par l'approche de Morse-Bott décrite ci-haut et ceux obtenus par théorie de Morse coïncident.

8.2.2 Opérateur de bord

Pour définir l'opérateur de bord, considérons un générateur $\Delta \xrightarrow{f} \mathcal{C}$. Posons $\gamma_x \in \partial M(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ la concaténation de trajectoires

$$\gamma_x = \gamma_1 * \cdots * \gamma_k$$

où $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_i(t) \in \mathcal{C}_i$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_i(t) \in \mathcal{C}_{i+1}$ avec $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_k = \mathcal{C}'$, telle que le point de départ de γ_x soit x , c'est-à-dire

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_1(t) = x \in f(\Delta).$$

Posons

$$\gamma_x^+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_k(t),$$

le point d'arrivée de γ_x .

On définit pour $\Delta \xrightarrow{f} \mathcal{C} \in C^A$, A parmi o, u et B est parmi o, s

$$\delta_B^A f = \sum_{\mathcal{C} \neq \mathcal{C}' \in C^B} \begin{pmatrix} f(\Delta) \rightarrow \mathcal{C}' \\ f(x) \mapsto \gamma_{f(x)}^+ \end{pmatrix}.$$

De la même façon, on définit $\bar{\delta}_B^A$ pour A, B parmi u, s en considérant $\gamma_x \in \partial M_{\text{red}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$, où $M_{\text{red}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ est la sous-variété composée de trajectoires réductibles. Les conditions de négligeabilité et de transversalité font de ces opérateurs des applications bien définies (Lin, 2018, Lemme 3.2.3).

On considère aussi l'opérateur de bord singulier

$$\delta f = \sum_{\substack{M \subset \Delta \\ \text{face de codimension 1}}} f|_M.$$

Pour $A \neq B$, on pose $\partial_A^B = \delta_A^B$ et $\bar{\partial}_A^B = \bar{\delta}_A^B$. Pour $A = B$, on pose $\partial_A^B = \delta + \delta_A^B$ et $\bar{\partial}_A^B = \delta + \bar{\delta}_A^B$.

Finalement, on définit les opérateurs de bord $\hat{\partial}, \check{\partial}$ et $\bar{\partial}$ de façon analogue à la définition des opérateurs en homologie de Seiberg-Witten-Floer standard (Section 7.7.3).

8.3 Homologie Pin(2)-équivariante

8.3.1 Complexe de chaînes

L'élément $j \in \mathbb{H}$ agit sur un générateur f par composition de f suivi de l'action de j sur B^σ .

$$\begin{aligned} j \cdot f : \Delta &\xrightarrow{f} \mathcal{C} \subset B^\sigma && \xrightarrow{j} j \cdot \mathcal{C} \subset B^\sigma \\ x &\longmapsto f(x) = [B, r, \psi] && \longmapsto [\bar{B}, r, \psi j] \end{aligned}$$

Montrons que le carré suivant est commutatif pour A parmi o, u et B est parmi o, s .

$$\begin{array}{ccc} C^A & \xrightarrow{\partial_B^A} & C^B \\ \downarrow j & & \downarrow j \\ C^A & \xrightarrow{\partial_B^A} & C^B \end{array}$$

Le champ de vecteurs $[(-\nabla L)^\sigma]$ est j -invariant : en effet, si γ est une trajectoire associée à $[(-\nabla L)^\sigma]$, alors $j \cdot \gamma$ l'est aussi. Ainsi, pour $f \in C^A$, la composante de $\partial_B^A j \cdot f$ correspondant à la variété critique \mathcal{C}' est

$$\begin{aligned} f(\Delta) &\rightarrow \mathcal{C}' \\ f(x) &\mapsto \gamma_{j \cdot f(x)}^+ \end{aligned}$$

En contre partie, la concaténation $\gamma_{j \cdot f(x)} = \gamma_1 * \dots * \gamma_k$ est telle que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_1 = j \cdot f(x)$. En multipliant par j , on obtient une concaténation $j \cdot \gamma_{j \cdot f(x)} = j \cdot \gamma_1 * \dots * j \cdot \gamma_k$ telle que $\lim_{t \rightarrow -\infty} j \cdot \gamma_1 = j^2 \cdot f(x) = f(x)$. On peut alors écrire $\gamma_{f(x)} = j \cdot \gamma_{j \cdot f(x)}$. L'action de j étant une involution, on a $j \cdot \gamma_{f(x)} = \gamma_{j \cdot f(x)}$. La composante de $j \partial_B^A f$ correspondant à \mathcal{C}' est

$$\begin{aligned} f(\Delta) &\rightarrow \mathcal{C}' \\ f(x) &\mapsto j \gamma_{f(x)}^+ = \gamma_{j \cdot f(x)}^+ \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $j \partial_B^A = \partial_B^A j$.

De même, $j \cdot \bar{\partial}_B^A = \bar{\partial}_B^A j$ pour A, B parmi u, s .

Posons

$$(C^A)^{\text{inv}} = \{f \in C^A \mid j \cdot f = f\}$$

l'ensemble des chaînes invariantes de C^A sous l'action de j et donc sous celle de $Pin(2)$, pour A parmi o, u, s . Soit $f \in (C^A)^{\text{inv}}$. On a

$$j \cdot \partial_B^A f = \partial_B^A j \cdot f = \partial_B^A f,$$

et de même pour $\bar{\partial}_B^A$. C'est donc dire que $\partial_B^A f, \bar{\partial}_B^A f \in (C^B)^{\text{inv}}$ et qu'on peut former les complexes de chaînes

$$(\check{C}^{\text{inv}} = (C^o)^{\text{inv}} \oplus (C^s)^{\text{inv}}, \check{d})$$

$$\begin{aligned}(\widehat{C}^{\text{inv}} &= (C^o)^{\text{inv}} \oplus (C^u)^{\text{inv}}, \widehat{\partial}) \\ (\overline{C}^{\text{inv}} &= (C^s)^{\text{inv}} \oplus (C^u)^{\text{inv}}, \overline{\partial}).\end{aligned}$$

8.3.2 Groupes d'homologie $\text{Pin}(2)$ -équivariants

Définition 8.3.1. Les homologies

$$\widetilde{HS}(Y, \mathfrak{s}), \widehat{HS}(Y, \mathfrak{s}), \overline{HS}(Y, \mathfrak{s})$$

respectivement associées à $(\check{C}^{\text{inv}}, \check{\partial}), (\widehat{C}^{\text{inv}}, \widehat{\partial}), (\overline{C}^{\text{inv}}, \overline{\partial})$ sont les *groupes d'homologie de Floer* $\text{Pin}(2)$ -équivariants de la variété (Y, \mathfrak{s}) , où \mathfrak{s} est une structure Spin^c autoconjuguée.

8.3.3 Structure de module

En homologie de Floer obtenue par théorie de Morse, l'anneau $\mathbb{Z}[U]$ apparaît en tant qu'anneau de cohomologie de $\mathbb{C}P^\infty$, espace classifiant de S^1 dont l'action définit B^σ . Dans le cas $\text{Pin}(2)$ -équivariant, l'action est donnée par le groupe $\text{Pin}(2)$ et son anneau de cohomologie est

$$H^*(B\text{Pin}(2); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[Q, V]/\langle Q^3 \rangle.$$

Ce dernier peut être calculé à partir de la fibration

$$\text{Pin}(2) \hookrightarrow SU(2) \rightarrow \mathbb{R}P^2$$

où la première flèche est l'inclusion et la deuxième flèche est la composition de la fibration de Hopf $SU(2) \cong S^3 \rightarrow S^2$ et du quotient $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$. Le résultat est alors obtenu grâce à la suite spectrale de Serre sachant que $H^*(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[Q]/\langle Q^3 \rangle$ et $H^*(BSU(2); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^*(\mathbb{H}P^\infty; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[V]$, où V est le générateur de $H^4(\mathbb{H}P^\infty; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (Manolescu, 2015, p. 5).

Comme c'était le cas pour la structure de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[U]$ -module des groupes d'homologie de Floer du chapitre précédent, un analogue du cap-produit (Lin, 2018, Sections 4.3

et 5.3) permet de considérer les groupes d'homologies $\text{Pin}(2)$ -équivariants comme des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[Q, V]/\langle Q^3 \rangle$ -modules.

8.3.4 Longue suite exacte

On définit des applications i, j, p analogues à celles de la section 7.8.2 dans le contexte Morse-Bott, pour lesquelles $\hat{\partial}, \check{\partial}$ et $\bar{\partial}$ sont telles de décrits en fin de section 8.2 (ici, on distingue l'application j de l'action du quaternion j). La même démonstration que celle de la proposition 7.8.3 donne lieu à une longue suite exacte en homologie $\text{Pin}(2)$ -équivariante.

Proposition 8.3.2. *Les applications i, j, p induisent une longue suite exacte pour les groupes d'homologies de Floer $\text{Pin}(2)$ -équivariants.*

Autrement dit, le triangle suivant est exact.

$$\begin{array}{ccc}
 \widetilde{HS}(Y, \mathfrak{s}) & \xrightarrow{j_*} & \widehat{HS}(Y, \mathfrak{s}) \\
 & \swarrow i_* & \searrow p_* \\
 & \overline{HS}(Y, \mathfrak{s}) &
 \end{array}$$

8.4 Homologie $\text{Pin}(2)$ -équivariante de sphères d'homologie

8.4.1 Variétés critiques

D'abord, on rappelle qu'une sphère d'homologie Y possède une unique structure $Spin^c$ car $H^2(Y; \mathbb{Z}) = 0$. Cette unique structure est autoconjuguée en vertu de la proposition 8.1.4.

Par la proposition 7.9.1, les équations de Seiberg-Witten possèdent une unique solution réductible $[B, 0]$. Soit B_0 la connexion de base induite par la structure $spin$ de Y . Posons $B = B_0 + b$. En vertu de la proposition 8.1.8, $j \cdot [B, 0] = [B_0 - b, 0]$ est aussi une solution

aux équations de Seiberg-Witten. L'unicité de cette solution implique qu'il existe $u \in S^1$ tel que $B_0 - b = B_0 + b - u^{-1}du$ et donc que $2b = u^{-1}du$. Il s'ensuit que

$$0 = F_{(B_0+b)^t} = F_{B_0^t} + F_{2b} = F_{B_0^t} + 2d(u^{-1}du) = F_{B_0^t},$$

ce qui montre que $[B_0, 0]$ est aussi une solution et que B est équivalent à jauge près à B_0 .

Par la proposition 8.1.7, chaque valeur propre λ_n de D_B correspond à un espace propre de dimension paire complexe. Dans le contexte de l'homologie de Floer obtenue par théorie de Morse standard, on pouvait trouver une perturbation des équations qui garantissait l'unidimensionalité des espaces propres. De façon analogue, il existe une perturbation j -équivariante aux équations de Seiberg-Witten faisant des espaces propres de D_B des espaces de dimension 2 complexe (Lin, 2018, Théorème 2.6).

Dans l'éclatement B^σ , chaque valeur propre correspond à la sphère S^3 dans un espace propre \mathbb{C}^2 , quotientée par l'action de multiplication par S^1 , si bien que les variétés critiques considérées pour les complexes de chaînes sont homéomorphes à des sphères S^2 .

8.4.2 Groupe d'homologie $\overline{HS}(Y)$

Une gradation relative entre variétés critiques permet de filtrer $\overline{\mathcal{C}}^{\text{inv}}$ en fixant une variété de base \mathcal{C}_0 correspondant à la plus petite valeur propre positive λ_0 de D_B . De façon analogue à la gradation en homologie de Seiberg-Witten-Floer, cette gradation fait intervenir l'indice d'un opérateur faisant office de Hessienne (Lin, 2018, Définition 3.6). Soit \mathcal{C} une variété critique associée à une valeur propre λ et soit n le nombre de valeurs propres λ' telles que $\lambda < \lambda' \leq \lambda_0$ ou $\lambda_0 < \lambda' \leq \lambda$ selon que λ soit négatif ou positif. On a

$$\text{gr}(\mathcal{C}, \mathcal{C}_0) = \begin{cases} -2n - 1 & \text{si } \lambda < 0, \\ 2n & \text{si } \lambda \geq 0. \end{cases}$$

En posant

$$F_k = \bigoplus_{j \leq k} C_j^{\text{inv}}$$

où C_j^{inv} est le sous-ensemble de $\overline{C}^{\text{inv}}$ engendré par les chaînes Pin(2)-invariantes dont le codomaine est une variété critique \mathcal{C} telle que $\text{gr}(\mathcal{C}, \mathcal{C}_0) = j$, on obtient une filtration de $\overline{C}^{\text{inv}}$ indicée par $k \in \mathbb{Z}$.

La suite spectrale (Davis et Kirk, 2001, Chapitre 9) associée à cette filtration munie de l'opérateur $\overline{\delta}$ restreint aux C_j^{inv} donne

$$\begin{aligned} \overline{HS}(Y) &= \bigoplus_k H(F_k/F_{k-1}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ &= \bigoplus_k H((C_k^{\text{inv}}, \overline{\delta}); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ &= \bigoplus_k H((C_k^{\text{inv}}, \delta); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en observant que suite au quotient, la seule entrée non triviale de la représentation matricielle de $\overline{\delta}$ est l'une des entrées diagonales $\overline{\delta}_u^u$ ou $\overline{\delta}_u^u$, selon que la variété critique définissant C_k^{inv} est stable ou instable. De plus, $\overline{\delta}_u^u = \overline{\delta}_u^u = \delta$ suite au quotient.

Considérons l'homéomorphisme $\mathcal{C} \cong S^2$. L'action de $j \in \mathbb{H}$ sur $\mathcal{C} \subset B^\sigma$ est une involution libre (Section 8.1.2); elle se traduit en l'action antipodale sur S^2 , l'unique involution libre sur S^2 . Une chaîne à valeurs dans S^2 invariante sous l'action antipodale définit une chaîne à valeurs dans $\mathbb{R}P^2$ par composition avec le quotient par l'action antipodale. Réciproquement, une chaîne à valeurs dans $\mathbb{R}P^2$ possède deux relèvements vers S^2 : leur somme est une chaîne invariante à valeurs dans S^2 . Ainsi, l'homologie du complexe $(C_k^{\text{inv}}, \delta)$ est isomorphe à l'homologie de $\mathbb{R}P^2$, ce qui permet de conclure que

$$\begin{aligned} \overline{HS}(Y) &= \bigoplus_k H(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ &\cong \bigoplus_k \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[Q]/\langle Q^3 \rangle \\ &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[V^{-1}, V, Q]/\langle Q^3 \rangle \end{aligned}$$

8.4.3 Gradation absolue

À l'instar de l'homologie de Seiberg-Witten-Floer, on peut définir une gradation absolue pour les générateurs des groupes d'homologie $\text{Pin}(2)$ -équivariants.

Définition 8.4.1. Soit Y sphère d'homologie et soit W un cobordisme entre S^3 et Y .

Le degré d'une chaîne η à valeurs dans une variété critique \mathcal{C} de Y est

$$\text{gr}(\eta) = -\dim M_W(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}) + 2 + \dim \eta + \frac{c_1(\mathcal{L})^2 - 2\chi(W) - 3\sigma(W)}{4}$$

où $M_W(\mathcal{C}_0, \mathcal{C})$ est définie de façon analogue à $M_W(a_0, a)$ en section 7.9.5, pour \mathcal{C}_0 la variété critique de S^3 associée à la plus petite valeur propre positive.

De façon générale, pour Y une variété de dimension 3 quelconque, on a (Lin, 2018, Prop. 3.6.5 et Théorème 5.5.5)

$$\dim M_W(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}) - \dim(\mathcal{C}) = \text{ind } D - \frac{\chi(W) + \sigma(W) - b_1(Y)}{2}$$

où D est l'opérateur de Dirac associé à la variété critique de W se restreignant à \mathcal{C}_0 et \mathcal{C} .

Lorsque Y est sphère d'homologie, on a $\dim(\mathcal{C}) = 2$ et $b_1(Y) = 0$, de sorte que

$$\text{gr}(\eta) = -\text{ind } D + \dim \eta + \frac{c_1(\mathcal{L})^2 + \sigma(W)}{4}.$$

Définition 8.4.2. Soit $Q^i V^j \in \overline{HS}(Y)$. Ce générateur correspond à un élément $[\eta] \in H((C_k^{\text{inv}}, \delta); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ représenté par une chaîne η à valeurs dans la variété critique \mathcal{C} telle que $\text{gr}(\mathcal{C}, \mathcal{C}_0) = k$, où \mathcal{C}_0 est la variété critique de Y associée à la plus petite valeur propre positive. Le degré de $Q^i V^j$ est

$$\text{gr}(Q^i V^j) = \text{gr}([\eta]) = \text{gr}(\eta).$$

Cette valeur ne dépend pas du choix de représentant η , car un autre représentant sera de même dimension et prendra aussi valeur dans \mathcal{C} .

CHAPITRE IX

NON-TRIANGULATION EN DIMENSIONS 5 ET PLUS

9.1 Invariants de Manolescu

Les sous-modules propres non triviaux des modules $Q^i\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[V^{-1}, V] \leq \overline{HS}(Y)$, $i = 0, 1, 2$ pour l'anneau $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[V, Q]/\langle Q^3 \rangle$ sont de la forme $Q^i V^{h_i} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[V]$ pour des $h_i \in \mathbb{Z}$. Par une démonstration analogue à celle de la proposition 7.9.2, on obtient que $p_* : \widehat{HS}(Y) \rightarrow \overline{HS}(Y)$ n'est ni trivial, ni surjectif pour Y une sphère d'homologie. C'est donc dire que

$$p_* \widehat{HS}(Y) = \bigoplus_{i=0}^2 Q^i V^{h_i} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[V]$$

pour des $h_i \in \mathbb{Z}$.

Définition 9.1.1. Les *invariants de Manolescu* d'une sphère d'homologie Y sont donnés par

$$\alpha(Y) = \frac{\text{gr}(Q^2 V^{h_2})}{2}, \quad \beta(Y) = \frac{\text{gr}(Q V^{h_1}) - 1}{2}, \quad \gamma(Y) = \frac{\text{gr}(V^{h_0}) - 2}{2}.$$

Ces invariants sont analogues à celui de Frøyshov pour l'homologie de Seiberg-Witten-Floer. En effet, on avait $h(Y) = -\text{gr}(U^{h(Y)})/2$.

Ce sont des invariants sous cobordismes d'homologie en vertu de la propriété suivante, analogue à celle de la proposition 7.9.4.

Proposition 9.1.2 (Lin, 2018, Théorème 5.5). *Soient Y, Y' des sphères d'homologies. Soit W un cobordisme allant de Y à Y' dont la forme d'intersection est définie négative.*

On a

$$\begin{aligned}\alpha(Y) &\geq \alpha(Y') + b_2(W)/8, \\ \beta(Y) &\geq \beta(Y') + b_2(W)/8, \\ \gamma(Y) &\geq \gamma(Y') + b_2(W)/8.\end{aligned}$$

Si W est cobordisme d'homologie, alors sa forme d'intersection est définie négative et $b_2(W) = 0$ donne l'inégalité entre les invariants de Y et ceux de Y' . Tel que raisonné pour la proposition 7.9.5, le cobordisme $-W$ donne les inégalités inverses. Les invariants de Manolescu sont bien invariants de cobordismes d'homologie.

De plus, de façon analogue à l'invariant de Frøyshov, ils présentent une antisymétrie pour l'orientation inverse (Lin, 2018, Théorème 5.5)

$$\begin{aligned}\alpha(-Y) &= -\gamma(Y) \\ \beta(-Y) &= -\beta(Y) \\ \gamma(-Y) &= -\alpha(Y)\end{aligned}$$

La propriété clé des invariants de Manolescu est le fait qu'ils sont des relèvements de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ à \mathbb{Z} de l'invariant de Rokhlin.

Proposition 9.1.3. $\mu(Y) \equiv \alpha(Y) \equiv \beta(Y) \equiv \gamma(Y) \pmod{2}$.

Démonstration. Montrons le résultat pour β . L'argument est identique pour α et γ . Soit $[\eta]$ la classe d'une chaîne dans \overline{C} correspondant à $QV^{h_1} \in \overline{HS}(Y)$. Cet élément est l'image par p_* de l'élément de degré minimal dans $\widehat{HS}(Y)$: par définition du degré, il est représenté par une chaîne de dimension 0. Par définition de p_* (Lin, 2018, Prop. 2.7), $[\eta]$ est aussi une chaîne de dimension 0.

Soit D l'opérateur de Dirac correspondant à la variété critique codomaine de η . Puisque

D est linéaire sur les quaternions, son indice réel est un multiple de 4. Alors

$$\text{gr}(\eta) \equiv -\text{ind } D + \dim \eta + \frac{c_1(\mathcal{L})^2 + \sigma(W)}{4} \pmod{4} \equiv \frac{c_1(\mathcal{L})^2 - \sigma(W)}{4} \pmod{4}$$

Soit $W = X \cup B^4$, ayant Y comme bord. On suppose avoir choisi X de sorte que W soit munie d'une structure spin (voir la remarque de la section 5.2.7). La structure spin^c associée à cette structure spin est autoconjuguée, d'où $c_1(\mathcal{L}) = c_1(\overline{\mathcal{L}}) = -c_1(\mathcal{L})$. Cette classe est d'ordre 2 dans $H^2(X; \mathbb{Z})$; elle s'avère triviale dans $H^2(X; \mathbb{Q})$. Par conséquent,

$$\beta(Y) = \text{gr}[\eta] \equiv -\frac{\sigma(X)}{4} \pmod{4}$$

ce qui entraîne

$$\beta(Y) \pmod{2} \equiv -\frac{\sigma(X)}{8} \pmod{2} = \mu(Y) \quad \square$$

9.2 Existence de variétés non triangulables en dimensions 5 et plus

Théorème 9.2.1 (Manolescu, 2013). *Il existe des variétés non triangulables de dimension 5 et plus.*

Démonstration. Soit Y sphère d'homologie dont l'invariant de Rokhlin est $\mu(Y) = 1$. Si $[Y]$ est d'ordre 2 dans le groupe de cobordisme d'homologie Θ_3^H , alors $[Y] = [-Y]$ et on a

$$\beta(Y) = \beta(-Y) = -\beta(Y),$$

d'où $\beta(Y) = 0$. Ceci contredit le fait que $\mu(Y) = 1$ car $\beta(Y) \pmod{2} = -\mu(Y)$.

Il n'existe donc pas de d'élément d'ordre 2 dans Θ_3^H dont l'invariant de Rokhlin est 1. Par le théorème de Galewski-Stern et Matumoto, il existe des variétés non triangulables en dimension 5 et plus. □

En particulier, la variété M de Galewski-Stern de dimension 5 telle que $Sq^1\kappa(M) \neq 0$ n'est pas triangulable.

Corollaire 9.2.2. *Pour toute dimension $n \geq 5$, il existe une variété de dimension n non triangulable.*

Démonstration. D'abord, on résume la construction de la variété de Galewski-Stern de dimension 5 (Galewski et Stern, 1979). On construit $X = P \cup_{\Sigma} C(\Sigma)$, où P est la variété ayant comme bord la sphère de Poincaré Σ (Prop. 4.3.2) et $C(\Sigma)$ est le cône de Σ . On attache une 1-anse $D^3 \times [0, 1]$ renversant l'orientation à $\Sigma \times [0, 1] \subset X \times [0, 1]$. Ceci donne une composante de bord $\Sigma \# \Sigma$ à laquelle on colle son cône, résultant en une 4-sphère d'homologie à laquelle on colle une fois de plus son cône. Posons Q l'espace résultant. Il existe une variété V séparant $\partial Q \times [0, 1]$ en deux composantes. On considère l'une de ces composantes U et on pose

$$M^5 = Q \cup_{\partial Q} U \cup_V W,$$

où W est une variété de dimension 5 ayant V comme bord. L'obstruction de Kirby-Siebenmann $\kappa(M^5)$ a un dual représenté par la sous-variété $L = y * (x \times [0, 1]) \subset Q$, où x et y sont les points cône de $C(\Sigma)$ et $C(\Sigma \# \Sigma)$ respectivement. Ceci découle du fait que $M \setminus L$ est PL par construction. De plus, le dual en homologie de $w_1(M^5)|_Q$ est représenté par $X \times \{1/2\}$. Ainsi,

$$Sq^1 \kappa(M^5)|_Q = w_1(M^5)|_Q \smile \kappa(M^5) = [X \times \{1/2\}] \cdot [L] \neq 0,$$

où \cdot indique le nombre d'intersection, qui par construction n'est pas nul. La restriction $Sq^1 \kappa(M^5)|_Q$ n'étant pas nulle, $Sq^1 \kappa(M^5)$ elle-même n'est pas nulle.

Maintenant, considérons $M^6 = M^5 \times S^1$. Par le théorème de structure d'un produit (Théorème 5.2.4), la variété $L \times S^1$ n'est pas PL si L ne l'est pas : elle représente le dual de $\kappa(M^6)$. Alors $Sq^1 \kappa(M^6) \neq 0$ car

$$Sq^1 \kappa(M^6)|_{Q \times S^1} = [X \times \{1/2\} \times S^1] \cdot [L \times S^1] \neq 0.$$

Soit $M^n = M^5 \times T^{n-5} = M^{n-1} \times S^1$, $n \geq 6$. Par récurrence, on a $Sq^1 \kappa(M^n) \neq 0$ pour tout $n \geq 6$. En conséquence du théorème 9.2.1 et de la démonstration du théorème 5.3.1, les variétés M^n ne sont pas triangulables. \square

CONCLUSION

La question d'existence d'une triangulation soulève naturellement celle d'unicité, que nous n'avons pas abordée dans ce mémoire. Deux triangulations K_1 et K_2 sont équivalentes s'il existe des subdivisions K'_1 et K'_2 et un homéomorphisme PL $K'_1 \cong K'_2$. La *Hauptvermutung* – la *conjecture principale* – demande si toutes les triangulations d'une variété triangulable sont équivalentes entre elles. En dimension 2, le théorème de Radó et la classification des surfaces impliquent l'unicité de la structure simpliciale. Moise démontre que la *Hauptvermutung* est vraie en dimension 3 en utilisant des techniques similaires à celles présentées au chapitre 3 (Moise, 1952, Théorème 36.2). Larry Siebenmann réfute la *Hauptvermutung* en dimensions 4 et plus en donnant un contre-exemple constructif (Kirby et Siebenmann, 1977, Annexe C, Section 2) et qualifie au passage la *Hauptvermutung* de « catastrophe généralisée » !

Bien que ce soit en dimension 4 que tombent l'existence et l'unicité d'une triangulation, nous avons vu que c'est en dimension 3, à travers le groupe de cobordisme d'homologie Θ_3^H , que la structure combinatoire d'une variété se dévoile. Ainsi, on peut s'attendre à ce que les techniques développées pour l'étude de Θ_3^H soient utiles à l'étude des variétés de dimension 3 en général. Des avancées ont été faites en ce sens dans les dernières années. Par exemple, Francesco Lin établit un triangle exact pour les groupes d'homologie Pin(2)-équivariants de variétés obtenues l'une de l'autre par chirurgie de Dehn (Lin, 2017, Théorème 1). Puis, Matthew Stoffregen calcule les invariants de Manolescu pour les sphères d'homologie de Seifert et leurs sommes connexes (Stoffregen, 2020, Théorèmes 1.2.1 et 1.3.4). Lin et Stoffregen démontrent indépendamment qu'il existe des sphères d'homologie qui ne sont pas cobordantes à un espace fibré de Seifert (Lin, 2017, p. 5; Stoffregen, 2020, Corollaire 1.2.11).

Une version plus maniable d'homologie de Floer est l'*homologie de Heegaard Floer*, dé-

veloppée par Zoltán Szabó et Peter Ozsváth (Ozsváth et Szabó, 2006). Elle s'avère isomorphe à l'homologie de Floer version Seiberg-Witten (Kutluhan *et al.*, 2010, Théorème principal, p. 2830). En particulier, l'invariant de Frøyshov que nous avons défini pour cette dernière a comme équivalent l'*invariant* d dans la version Heegaard Floer. Il est donc attendu que la version $\text{Pin}(2)$ -équivariante et les invariants α, β, γ de Manolescu puissent être décrits en termes d'homologie de Heegaard Floer. Un tel point de vue serait souhaité afin de combiner la calculabilité de la version Heegaard Floer à l'information tirée de l'involution de l'action de $\text{Pin}(2)$. C'est dans cette optique que Kristen Hendricks et Ciprian Manolescu développent une version $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -équivariante de l'homologie de Heegaard Floer, pour une action involutive de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ en tant que sous-groupe engendré par $j \in \mathbb{H}$ dans $\text{Pin}(2)$ (Hendricks et Manolescu, 2017). De plus, Stoffregen parvient à décrire α, β, γ en terme de l'invariant d pour les sphères d'homologie (Stoffregen, 2020, Corollaire 1.2.2). Une généralisation de cette correspondance pour toute variété de dimension 3 permettrait d'étendre la portée de l'homologie de Heegaard Floer, notamment pour l'étude de nœuds et de leurs classes de concordance pour lesquels l'homologie de Heegaard Floer produit des invariants intéressants (Ozsváth et Szabó, 2006 ; Hom, 2017 ; Hom, 2021).

Ainsi, le problème d'existence de triangulations pour les variétés topologiques s'est achevé grâce à des idées novatrices en topologie de basse dimension. Alors qu'en dimensions 4 et plus on ne peut compter sur le cadre structurel qu'offre une triangulation, on peut en faire librement usage dans l'étude des variétés de dimension 3. Bien que cette structure confère une certaine rigidité aux variétés de dimension 3, ces dernières abondent en propriétés que l'on voudrait mieux comprendre. À cette fin, les outils que nous avons étudiés dans ce mémoire s'avèrent prometteurs.

RÉFÉRENCES

- Akbulut, S. et McCarthy, J. D. (1990). *Casson's invariant for oriented homology 3-spheres : an exposition*. Numéro 36 de Mathematical notes. Princeton, N.J : Princeton University Press.
- Brown, M. (1960). A proof of the generalized Schoenflies theorem. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 66(2), 74 – 76.
- Cohen, M. M. (1967). Simplicial Structures and Transverse Cellularity. *The Annals of Mathematics*, 85(2), 218–245.
- Cohen, M. M. (1970). Homeomorphisms between homotopy manifolds and their resolutions. *Inventiones Mathematicae*, 10(3), 239–250.
- Cohen, M. M. (1973). *A Course in Simple-Homotopy Theory*, volume 10 de *Graduate Texts in Mathematics*. New York, NY : Springer New York.
- Davis, J. F. et Kirk, P. (2001). *Lecture notes in algebraic topology*. Numéro 35 de Graduate studies in mathematics. Providence, R.I : American Mathematical Society.
- Davis, M. W., Fowler, J. et Lafont, J.-F. (2014). Aspherical manifolds that cannot be triangulated. *Algebraic & Geometric Topology*, 14(2), 795–803.
- Dieudonné, J. (1989). *A history of algebraic and differential topology, 1900-1960*. Modern Birkhäuser classics. Boston : Birkhäuser.
- Edmonds, A. L. et Stern, R. J. (1975). Resolutions of Homology Manifolds : A Classification Theorem. *Journal of the London Mathematical Society*, s2-11(4), 474–480.
- Freedman, M. H. (1982). The topology of four-dimensional manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 17(3), 357–453.
- Friedrich, T. (2000). *Dirac Operators in Riemannian Geometry*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society.
- Frøyshov, K. A. (2010). Monopole Floer homology for rational homology 3-spheres. *Duke Mathematical Journal*, 155(3), 519–576.
- Frøyshov, K. A. (2012). 4-manifolds and intersection forms with local coefficients. *Journal of Differential Geometry*, 91(2), 233 – 259.

- Galewski, D. E. et Stern, R. J. (1979). A universal 5-manifold with respect to simplicial triangulations. In *Geometric Topology* 345–350. Elsevier.
- Galewski, D. E. et Stern, R. J. (1980). Classification of Simplicial Triangulations of Topological Manifolds. *The Annals of Mathematics*, 111(1), 1–34.
- Gallier, J. H. et Xu, D. (2013). *A guide to the classification theorem for compact surfaces*. Geometry and computing. Springer.
- Golubitsky, M. et Guillemin, V. (1973). *Stable Mappings and Their Singularities* (1 éd.), volume 14 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag New York.
- Gompf, R. E. (1997). $Spin^c$ -structures and homotopy equivalences. *Geometry & Topology*, 1(1), 41–50.
- Hatcher, A. (2017). Vector bundles & K-theory. Version 2.2. <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VB.pdf>. Consulté le 2021-03-28.
- Hendricks, K. et Manolescu, C. (2017). Involutive Heegaard Floer homology. *Duke Mathematical Journal*, 166(7).
- Hom, J. (2017). A survey on Heegaard Floer homology and concordance. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 26(02), 1740015.
- Hom, J. (2021). Homology cobordism, knot concordance, and Heegaard Floer homology. *arXiv : Geometric Topology*.
- Hutchings, M. (2002). Lecture notes on Morse homology. <https://math.berkeley.edu/~hutching/teach/276-2010/mfp.ps>. Consulté le 2021-06-28.
- Kervaire, M. A. (1965). Le théorème de Barden-Mazur-Stallings. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 40, 31–42.
- Kervaire, M. A. (1969). Smooth homology spheres and their fundamental groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 144, 67–72.
- Kirby, R. C. (1989). *The Topology of 4-Manifolds*, volume 1374 de *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg.
- Kirby, R. C. et Scharlemann, M. G. (1979). Eight faces of the Poincaré homology 3-sphere. In J. C. Cantrell (dir.), *Geometric Topology* 113–146. Athens, Georgia : Academic Press.
- Kirby, R. C. et Siebenmann, L. C. (1977). *Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations*. Numéro 88 de *Annals of Mathematics Studies*. Princeton, NJ : Princeton University Press.
- Kister, J. M. (1964). Microbundles are Fibre Bundles. *The Annals of Mathematics*, 80(1), 190.

- Kobayashi, S. (1987). *Differential geometry of complex vector bundles*. Numéro 15 de Publications of the Mathematical Society of Japan. Tokyo et Princeton, N.J. : Iwanami Shoten et Princeton University Press.
- Kobayashi, S. et Nomizu, K. (1963). *Foundations of differential geometry. Vol. I*. New York : Interscience Publishers.
- Kosinski, A. A. (1993). *Differential manifolds*. Boston : Academic Press.
- Kronheimer, P. et Mrowka, T. (2007). *Monopoles and Three-Manifolds*, volume 10 de *New mathematical monographs*. Cambridge University Press.
- Kutluhan, Ç., Lee, Y.-J. et Taubes, C. (2010). $HF = HM, I$: Heegaard Floer homology and Seiberg–Witten Floer homology. *Geometry & Topology*, 24(6), 2829 – 2854.
- Lin, F. (2015). Lectures on monopole Floer homology. *Proceedings of Gökova Geometry-Topology Conference 2015*, 39–80.
- Lin, F. (2017). The surgery exact triangle in $\text{Pin}(2)$ –monopole Floer homology. *Algebraic & Geometric Topology*, 17(5), 2915–2960.
- Lin, F. (2018). A Morse-Bott approach to monopole Floer homology and the triangulation conjecture. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 255(1221), 1–174.
- Manolescu, C. (2015). $\text{Pin}(2)$ -Equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the Triangulation Conjecture. *Journal of the American Mathematical Society*, 29(1), 147–176.
- Martin, N. (1973). On the Difference Between Homology and Piecewise-Linear Bundles. *Journal of the London Mathematical Society*, s2-6(2), 197–204.
- Martin, N. et Maunder, C. (1971). Homology cobordism bundles. *Topology*, 10(2), 93–110.
- Matumoto, T. (1978). Triangulation of manifolds. *Proc. Sympos. Pure Math.*, 32(2), 3–6.
- McCleary, J. (2001). *A user's guide to spectral sequences* (2 éd.). Numéro 58 de Cambridge studies in advanced mathematics. New York : Cambridge University Press.
- Milnor, J. (1963). *Morse Theory*, volume 51 de *Annals of Mathematic Studies*. Princeton University Press.
- Milnor, J. (1964). Microbundles. *Topology*, 3, 53–80.
- Milnor, J. (2011). Differential topology forty-six years later. *Notices of the*

American Mathematical Society, 58(6).

Milnor, J. W. et Stasheff, J. D. (1974). *Characteristic classes*. Numéro 76 de *Annals of mathematics studies*. Princeton, N.J : Princeton University Press.

Mitchell, S. A. (2001). Notes on principal bundles and classifying spaces. <https://sites.math.washington.edu/~mitchell/Notes/prin.pdf>. Consulté le 2021-05-13.

Moise, E. E. (1952). Affine Structures in 3-Manifolds : V. The Triangulation Theorem and Hauptvermutung. *The Annals of Mathematics*, 56(1), 96.

Moise, E. E. (1977). *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, volume 47 de *Graduate Texts in Mathematics*. New York, NY : Springer New York.

Morgan, J. (1996). *The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds*. Numéro 44 de *Mathematical notes*. Princeton, N.J : Princeton University Press.

Ozsváth, P. et Szabó, Z. (2006). An introduction to Heegaard Floer homology. In Clay Mathematics Institute et D. Ellwood (dir.), *Floer homology, gauge theory, and low-dimensional topology*, volume 5 de *Clay mathematics proceedings* 3–27. American Mathematical Society.

Perelman, G. (2002). The entropy formula for the ricci flow and its geometric applications. *arXiv : Differential Geometry*.

Perelman, G. (2003a). Finite extinction time for the solutions to the ricci flow on certain three-manifolds. *arXiv : Differential Geometry*.

Perelman, G. (2003b). Ricci flow with surgery on three-manifolds. *arXiv : Differential Geometry*.

Quinn, F. (1982). Ends of maps. III. Dimensions 4 and 5. *Journal of Differential Geometry*, 17(3), 503–521.

Radó, T. (1925). Über den Begriff der Riemannschen Fläche. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 2(2), 110–121.

Ray, A. et Ruberman, D. (2017). Four-dimensional analogues of Dehn’s lemma. *Journal of the London Mathematical Society*, 96(1), 111–132.

Rolfsen, D. (2003). *Knots and Links*. Providence, Rhode Island : AMS Chelsea Publishing.

Rourke, C. P. et Sanderson, B. J. (1968). Block Bundles : I. *The Annals of Mathematics*, 87(1), 1–28.

Sato, H. (1972). Constructing manifolds by homotopy equivalences I. An obstruction to constructing PL-manifolds from homology manifolds. *Annales de*

l'institut Fourier, 22(1), 271–286.

Saveliev, N. (2002). *Invariants for homology 3-spheres*. Berlin : Springer.

Scorpan, A. (2005). *The wild world of 4-manifolds*. Providence, R.I : American Mathematical Society.

Shalen, P. B. (1984). A “piecewise-linear” method for triangulating 3-manifolds. *Advances in Mathematics*, 52(1), 34–80.

Siebenmann, L. (1970). Are non triangulable manifolds triangulable? In J. C. Cantrell et E. C. H. (dir.), *Topology of Manifolds* 77–84. Chicago : Markham Publishing Company.

Stoffregen, M. (2020). Pin(2)-equivariant Seiberg–Witten Floer homology of Seifert fibrations. *Compositio Mathematica*, 156(2), 199–250.

Sullivan, D. (1971). Singularities in spaces. In A. Dold, B. Eckmann, et C. T. C. Wall (dir.), *Proceedings of Liverpool Singularities Symposium II*, volume 209 196–206. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg.

Thomassen, C. (1992). The Jordan-Schönflies Theorem and the Classification of Surfaces. *The American Mathematical Monthly*, 99(2), 116–130.

Wall, C. T. C. (2016). *Differential topology*. Cambridge University Press.

Whitehead, J. H. C. (1940). On C^1 -complexes. *Annals of Mathematics*, 41(4), 809–824.

Witten, E. (1991). Introduction to cohomological field theories. *International Journal of Modern Physics A*, 06(16), 2775–2792.