Non-triangulation en dimension 4

Décembre 2020
(mise à jour Mars 2022)

Le théorème de Poincaré-Perelman établi en 2003 ([1], [2], [3]) donne une nouvelle démonstration de l'existence d'une variété topologique non triangulable en dimension 4.

Théorème 1 (Conjecture de Poincaré, Perelman, 2003)**.** *Une variété topologique fermée de dimension 3 simplement connexe est homéomorphe à la sphère* S^3*.*

La démonstration originale de l'existence d'une variété topologique non triangulable en dimension 4 est due à Andrew Casson ([4], p. xvi). Elle fait usage de l'invariant de Casson, un relèvement de l'invariant de Rokhlin.

1 Variété de Freedman

Le contre-exemple étudié par Casson est celui de la variété $E8$ de Freedman dont la construction repose sur le résultat suivant ([5], Théorème 1.4').

Théorème 2 (Freedman, 1982)**.** *Toute sphère d'homologie de dimension 3 est le bord d'une variété contractile de dimension 4.*

Proposition 1. *Il existe une variété fermée de dimension 4* M *de signature* $\sigma(M) = 8$*.*

Démonstration. Considérons la sphère de Poincaré Σ, une sphère d'homologie de dimension 3 correspondant au quotient $SO(3)/A_5$, où A_5 est le sous-groupe alterné du groupe symétrique S_5, isomorphe au groupe de symétries rotationelles d'un dodécaèdre régulier. Σ est bord d'une variété orientée P de forme d'intersection $E8$ ([6], pp. 114-115).

$$E8 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La signature de P est $\sigma(P) = 8$. Par le théorème de Freedman, Σ est aussi bord d'une variété contractile Δ. En posant

$$M = P \cup_\Sigma \Delta$$

et par additivité de Novikov, on a $\sigma(M) = \sigma(P) + \sigma(\Delta) = 8 + 0 = 8$. □

2 Existence de variétés non triangulable en dimension 4

Les lemmes et le corollaire qui permettent de faire appel au théorème de Poincaré-Perelman sont démontrés dans la prochaine section.

Théorème 3 (Casson, 1985). *Il existe des variétés de dimension 4 non triangulables.*

Démonstration. Soit M la variété de Freedman de la proposition 1, de signature $\sigma(M) = 8$. Sa deuxième classe de Stiefel-Whitney est triviale : puisqu'elle est orientée, $w_1(M) = 0$ et pour tout $x \in H^2(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

$$w_2 \smile x = (w_2 \smile w_1^2) \smile x = Sq^2(x) = x^2 = 2 \mod 2 = 0.$$

Ainsi, il découle du théorème de Rokhlin que M ne possède pas de structure lisse.

Supposons que M possède une triangulation. Puisque M est une variété topologique, les liens de chaque sommet sont simplement connexes (Lemme 3). De plus, ce sont des complexes simpliciaux qui sont des variétés d'homologie de dimension 3, ce qui en fait des variétés topologiques (Corollaire et Lemme 4).

Par le théorème de Poincaré-Perelman, ces liens sont tous homéomorphes à S^3. Ceci confère à la triangulation (et à M), une structure linéaire par morceaux. Toute variété PL de dimension 4 pouvant être munie d'une structure lisse, M est donc lisse, ce qui contredit la théorème de Rokhlin. □

Remarque. Nous avons démontré au passage qu'en dimension 4, une triangulation est équivalente à une structure PL.

2.1 Application du théorème de Poincaré-Perelman

Nous détaillons dans cette section les étapes nous permettant d'appliquer le théorème de Poincaré-Perelman.

Lemme 1. *Soit SX la suspension d'un espace X. Si SX est une variété topologique de dimension n, alors SX est homéomorphe à la sphère S^n et X est homotopiquement équivalent à S^{n-1}.*

Démonstration. Soit p le point auquel $X \times \{1\}$ est identifié dans la suspension

$$SX = X \times [-1, 1]/\sim$$

où $(x,t) \sim (y,s)$ si et seulement si $t = s \in \{-1, 1\}$. Il existe un voisinage U de p homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ dont le bord $\partial U \cong S^{n-1}$ est à bicollier dans $h(U)$. Soit $t_0 \in (-1, 1]$ tel que $X \times [t_0, 1]/X \times \{1\} \subset U$. L'homéomorphisme h fixant $X \times \{t_0\}$ et envoyant $X \times [t_0, 1]/X \times \{1\}$ sur $X \times [-1, t_0]/X \times \{-1\}$ donne un ouvert $h(U) \cong \mathbb{R}^n$. Les ouverts $h(U)$ et U recouvrent SX. Par le théorème de Schoenflies généralisé (Théorème **??**), $h(U) \setminus U$ est homéomorphe à une n-boule fermée. Ainsi, SX est l'identification des deux n-boules fermées $h(U) \setminus U$ et $\overline{U}$ en leur bord commun ∂U. On en conclut que SX est homéomorphe à la sphère S^n.

De plus, X est rétraction de $SX \setminus \{p, q\}$, où q est le point auquel $X \times \{-1\}$ est identifié dans SX. Par conséquent, on obtient les équivalences homotopiques

$$X \simeq SX \setminus \{p, q\} \cong S^n \setminus \{2 \text{ points}\} \simeq S^{n-1}.$$ □

Lemme 2. *Soit X un espace topologique. Il existe un homéomorphisme*

$$CX \times [-1, 1]^k \cong C(S^k X),$$

où CX est le cône de X et $S^k X$ est la suspension k fois de X.

Démonstration. La suspension SX peut s'écrire

$$(X \times [-1, -1/2]/X \times \{-1\}) \cup (X \times [-1/2, 1/2]) \cup (X \times [1/2, 1]/X \times \{1\}),$$

homéomorphe à $CX \cup (X \times [-1,1]) \cup CX$. Son cône est donné par

$$\Big(CX \cup (X \times [-1,1]) \cup CX\Big) \times [-1,1] / \Big(CX \cup (X \times [-1,1]) \cup CX\Big) \times \{1\},$$

qu'on peut décrire comme l'union

$$\bigcup_{t\in[0,1]} CX \times \{t\} \cup X \times [-t,t] \times \{t\} \cup CX \times \{t\}$$

ce qui correspond précisément à l'espace $CX \times [-1,1]$.

En remplaçant X par $S^{k-1}X$, on obtient $C(S^{k-1}X) \times [-1,1] \cong C(S^k X)$.

Montrons le résultat par récurrence sur k. Le cas $k=0$ est trivial et nous avons démontré le cas $k=1$ ci-haut. Supposons que $CX \times [-1,1]^{k-1} \cong C(S^{k-1}X)$. Alors

$$C(S^k X) = C(S^{k-1}X) \times [-1,1] = (CX \times [-1,1]^{k-1}) \times [-1,1] = CX \times [-1,1]^k.$$

□

Définition 1. Un espace topologique M est une *variété d'homologie combinatoire* s'il existe une un complexe simplicial K de dimension n tel que $M \cong |K|$ et tel que pour tout simplexe $\sigma \in K$, $H_*(Lk(\sigma)) = H_*(S^{n-\dim(\sigma)-1})$.

Remarque. On utilise l'adjectif *combinatoire* pour distinguer la définition 1 de celle d'une *variété d'homologie* de dimension n. Cette dernière est un espace M dont l'homologie locale $H_k(M, M\setminus\{x\};\mathbb{Z})$ en tout point $x \in M$ est égale à $\mathbb{Z}$ pour $k=n$ et 0 sinon. Toute variété d'homologie combinatoire est une variété d'homologie : en effet, en supposant sans perte de généralité que x est un sommet, par excision de $St(x) \setminus \{x\}$, on a

$$H_k(St(x), St(x)\setminus\{x\};\mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}_{k-1}(St(x)\setminus\{x\};\mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}_{k-1}(Lk(x);\mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}_{k-1}(S^{n-1};\mathbb{Z}).$$

Lemme 3. *Soit K une triangulation d'une variété topologique $M \cong |K|$ de dimension n. Les liens $Lk(\sigma)$ pour tout k-simplexe σ de K, $0 \le k \le n$, ont l'homologie d'une sphère S^{n-k-1}. En particulier, M est une variété d'homologie combinatoire.*

Démonstration. Par définition du joint topologique, écrivons

$$Lk(\sigma) * \sigma = (Lk(\sigma) \times \sigma \times [0,1]) / (Lk(\sigma) \times \{1\}, \sigma \times \{0\}).$$

L'ensemble des simplexes de $\overline{St}(\sigma)$ ne contenant pas σ est réalisé géométriquement par $Lk(\sigma) * \partial\sigma$. On a

$$\begin{aligned} St(\sigma) &\cong (Lk(\sigma) * \sigma) \setminus (Lk(\sigma) * \partial\sigma) \\ &\cong (Lk(\sigma) \times \operatorname{int}\sigma \times (0,1]) / (Lk(\sigma) \times \{1\}) \\ &\cong \Big(CLk(\sigma) \setminus (Lk(\sigma) \times \{0\})\Big) \times \operatorname{int}\sigma, \end{aligned}$$

En tant qu'ouvert de la variété M, $St(\sigma)$ est une variété. Ainsi, sa fermeture est une variété de dimension n, avec bord ∂, homéomorphe à

$$CLk(\sigma) \times \sigma \cong CLk(\sigma) \times [-1,1]^k \cong C(S^k Lk(\sigma))$$

où le dernier homéomorphisme est donné par le lemme 2. La suspension $S^{k+1}Lk(\sigma) = C(S^k Lk(\sigma)) \cup_\partial C(S^k Lk(\sigma))$ est une variété topologique de dimension n et par le lemme 1, elle est homéomorphe à S^n. Puisque $\widetilde{H}_i(SX) \cong \widetilde{H}_{i-1}(X)$ pour X espace topologique quelconque, on obtient

$$\widetilde{H}_{i-k}(S^{n-k-i}) = \widetilde{H}_i(S^n) \cong \widetilde{H}_i(S^k Lk(\sigma)) \cong \widetilde{H}_{i-k}(Lk(\sigma)). \qquad \square$$

En particulier, lorsque $k = 0$ et $n = 4$, la suspension $SLk(\sigma)$ est homéomorphe à S^4 et $Lk(\sigma)$ est homotopiquement équivalent à S^3. Ainsi, $Lk(\sigma)$ est simplement connexe.

Corollaire. *Soit K une triangulation d'une variété topologique $M \cong |K|$ de dimension n. Les liens $Lk(\sigma)$ pour tout σ simplexe de K sont des variétés d'homologie.*

Démonstration. Soit τ un k-simplexe de $Lk(\sigma)$ et posons $l = \dim \sigma$. Par définition du lien,

$$H_*(Lk(\tau, Lk(\sigma))) = H_*(Lk(\tau * \sigma, K)) = H_*(S^{n-(k+l+1)-1}). \qquad \square$$

Lemme 4. *Si $M \cong |K|$ est une variété d'homologie combinatoire de dimension 3, alors elle est une variété topologique.*

Démonstration. Soit $x \in M$ et supposons sans perte de généralité que x est un sommet de K (quitte à prendre une subdivision de K).

Soit $y \in Lk(x)$ qu'on suppose sans perte de généralité être un sommet de $Lk(x)$. Par le lemme 3

$$H_*(Lk(y, Lk(x))) = H_*(Lk(yx, K)) = H_*(S^{3-1-1}) = H_*(S^1).$$

Par définition du lien, $Lk(y, Lk(x))$ est forcément homéomorphe à S^1, si bien que $\overline{St}(y, Lk(x)) = CLk(y, Lk(x)) = B^2$, d'où l'existence d'un voisinage de y homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ dans $Lk(x)$. Ce dernier est une variété topologique de dimension 2.

L'unique variété topologique de dimension 2 ayant l'homologie de S^2 est S^2 elle-même. Ainsi, $\overline{St}(x, K) \cong CLk(x, K) \cong CS^2 \cong B^3$. Il s'ensuit qu'on peut trouver un voisinage de x homéomorphe à $\mathbb{R}^3$, contenu dans $\overline{St}(x, K) \subset M$. $\square$

En combinant le corollaire 2.1 et le lemme 4, on obtient que les liens des sommets sont des variétés topologiques. Le raisonnement du lemme 3 donne la simple connexité de ces liens. Le théorème de Poincaré-Perelman s'applique bel et bien aux liens des sommets d'une variété topologique triangulée.

Références

[1] Grigori Perelman : The entropy formula for the ricci flow and its geometric applications. *arXiv : Differential Geometry*, 2002.

[2] Grigori Perelman : Finite extinction time for the solutions to the ricci flow on certain three-manifolds. *arXiv : Differential Geometry*, 2003.

[3] Grigori Perelman : Ricci flow with surgery on three-manifolds. *arXiv : Differential Geometry*, 2003.

[4] Selman Akbulut et John D. McCarthy : *Casson's invariant for oriented homology 3-spheres : an exposition.* Numéro 36 de Mathematical notes. Princeton University Press, Princeton, N.J, 1990.

[5] Michael Hartley Freedman : The topology of four-dimensional manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 17(3):357–453, janvier 1982.

[6] R. C. Kirby et M. G. Scharlemann : Eight faces of the poincare homology 3-sphere. *In* J. C. Cantrell, éditeur : *Geometric Topology*, pages 113–146. Academic Press, Athens, Georgia, 1979.